

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES



DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍA

LAS ESTRUCTURAS TOPOLÓGICAS SOBRE LAS VARIETADES DE GRAFO Y LA JERARQUÍA DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO.

Que para obtener el Título de:

DOCTOR en CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Presenta

Fernando Ignacio Becerra López

Director de Tesis

Dr. Alfonso Manuel Hernández Magdaleno

Codirector de Tesis

Dr. Vladimir Efremov

Ameca, Jalisco; Mayo de 2015



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
COORDINACION DE DOCTORADO EN CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES

28 MAY 2015

OFICIALIA DE PARTES

NOMBRE: chase HORA: 4:30

Mtro. Francisco Maldonado Virgen
Coordinador Control Escolar
CUVALLES

At'n Dr. Víctor Manuel Castillo Girón

PRESENTE

Por este medio nos permitimos hacer de su conocimiento que el trabajo de tesis presentado por el **Mtro. Fernando Ignacio Becerra López**, con código 091186934, para optar por el grado de Doctor en Ciencias Físico Matemáticas con el tema titulado

“Las estructuras topológicas sobre las variedades de grafo y la jerarquía de las constantes de acoplamiento”,

SÍ CUMPLE con los requerimientos exigidos por la Junta Académica para su presentación en examen de grado.

Por tal motivo, le informamos que el examen de grado se efectuará el día 3 de junio a las 10:30 hrs en la sala de gobierno. Al respecto le solicitamos atentamente la elaboración del acta correspondiente. Asimismo le comunico sobre la designación del comité de examen de grado.

- PRESIDENTE** Dr. Alfonso Manuel Hernández Magdaleno
- SECRETARIO** Dra. Claudia Moreno González
- VOCAL** Dr. Vladimir N. Efremov
- JURADO** Dr. José Edgar Madriz Aguilar
- JURADO** Dr. Fermín Aceves de la Cruz

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
C. U. VALLES

28 MAYO 2015

Secretaría Académica

Fecha Juro Hora 5:15

Sin otro particular aprovechamos la oportunidad para reiterarle mi atenta y distinguida consideración.

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES
COORDINACION DE CONTROL ESCOLAR

28 MAY 2015

STATUS: RESISTION RETENIDO INCOMPLETO

SE RECALIFICA PARA LA FECHA DE CALIFICACION PARA SU SEGURO CUMPLIMIENTO Y COTEJAMIENTO (SALVO OBSERVACIONES)

Carmona Hate

ATENTAMENTE
“PIENSA Y TRABAJA”
Ameca, Jalisco, a 28 de Mayo de 2015

Dr. Víctor Manuel Rentería Tapia
Coordinador de Doctorado en
Ciencias Físico Matemáticas

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
C. UNIVERSITARIO DE LOS VALLES
Coordinación de Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas

GRACIAS TOTALES 🍷

Índice general

Introducción	III
1. Espacios de grafo y matriz de enlace	1
1.1. Grafo Γ_p de tipo árbol y su representación como matriz de bloques.	1
1.2. Matriz de enlace racional para una variedad de grafo $M(\Gamma_p)$	5
2. Modelo topológico BF 7-dimensional	12
3. Representación topológica del espacio-tiempo	17
3.1. Secuencia primaria de Bh-esferas.	17
3.2. k -derivada de una Bh-esfera.	18
3.3. Diagrama de plumbing.	19
3.4. Resultados de las matrices racionales de enlace.	21
3.5. Jerarquía de las constantes de acoplamiento.	22
4. Ajuste fino	25
5. Cálculo del rango de Q	30
5.1. Rango de la matriz Q	30
5.2. Demostración del algoritmo para la obtención de fracciones continuas.	31
5.3. Ejemplos de aplicación del algoritmo.	33
5.4. Uso del algoritmo para calcular el rango de la matriz Q	35
Conclusiones	38
A. Esferas homológicas	40
A.1. Esferas homológicas fibradas de Seifert.	40
A.2. Esfera homológica de Brieskorn.	42
A.3. Espacio de lentes.	43

B. Construcción de la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$	44
B.1. k-derivadas para cada Bh-esfera $S_n^{(l)}$	44
B.2. Invariantes para cada Bh-esfera $S_n^{(l)}$	47
B.3. Invariantes para cada espacio de lentes $L(p, q)$	48
C. Cálculo de las fracciones continuas para $K(0)$	51
C.1. Implementación del algoritmo.	51
C.2. Uso del algoritmo para el cálculo de las fracciones continuas.	52

Introducción

La motivación general para la realización del presente trabajo es encontrar un modelo puramente topológico que represente de manera adecuada el problema de la jerarquía de las constantes de acoplamiento. Aunado a esto, representar el fenómeno de ajuste fino (fine tuning) relacionado al problema de la constante cosmológica no cero, como lo muestran recientes mediciones experimentales. Una de ellas es el descubrimiento en 1998 (midiendo la luminosidad aparente de una supernova distante [1, 2]) de la expansión acelerada del universo, consistente con una constante cosmológica positiva [3, 4]

$$\rho_\Lambda = (1.35 \pm 0.15) \times 10^{-123}, \quad (1)$$

e inconsistente con $\rho_\Lambda = 0$. Recientes confirmaciones corroboran esta conclusión. Otro avance experimental, consistente en la observación de la masa del bosón de Higgs alrededor de los 125 GeV [5, 6], sugiere, junto con el no descubrimiento de partículas de supersimetría (SUSY)¹ en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC por sus siglas en inglés), que la escala de rompimiento SUSY es considerablemente más alta que la escala electrodébil. Esto provoca duda de que SUSY de energía baja pueda servir como solución del problema de jerarquía (ver, por ejemplo, [7]).

Consideramos el problema de jerarquía de norma (gauge) en el aspecto de jerarquía de las constantes de acoplamiento adimensionales incluyendo la constante cosmológica [3]. El problema de la constante cosmológica (densidad de energía de vacío), como regla, se mantiene aparte y se investiga como un problema de ajuste fino ya que las teorías de campos cuánticos predicen un $|\rho_\Lambda|$ entre 60 y 120 órdenes de magnitud más grande que la cota experimental (1) (ver, por ejemplo, [8, 4] y el capítulo 4 para revisar algunas de las contribuciones a ρ_Λ). Hay diferentes acercamientos al problema de la constante cosmológica tales como el modelo de “inflación eterna” [9], el concepto de “paisaje” de la teoría de cuerdas (string landscape) [10], el modelo de “universos bebé” [11, 12, 13], *etc.* Este problema de ajuste fino está relacionado al problema de la constante cosmológica no cero, como lo muestran recientes

¹Según el modelo estándar de la física de partículas, la materia está formada por fermiones y bosones. La supersimetría indica que cada partícula (fermión o bosón) debe tener su supercompañera.

mediciones experimentales. Pero con estos modelos no se puede predecir y calcular el valor real de la constante cosmológica, así como no puede explicar (fuera del principio antrópico) la existencia de una pequeña escala de energía de vacío como se ve en (1). Este aspecto del problema es de cierta manera análogo al problema de jerarquía.

Al mismo tiempo ha sido desarrollada una excelente descripción teórica de sistemas jerárquicos como los estados cuánticos de Hall fraccionales (FQH) [14, 15] y aislantes topológicos fraccionales [16, 17, 18], que están basados en la existencia de un nuevo estado de materia caracterizados por un nuevo tipo de orden: el orden topológico. Estos métodos son aplicados no sólo a la descripción de fenómenos tridimensionales tales como el efecto de Hall fraccional cuántico (FQHE), sino también para la explicación de sistemas 4-dimensionales conectados con una superconductividad topológica [19] o un confinamiento topológico [20], sin ningún patrón de ruptura espontánea de simetría. Una de las características básicas del orden topológico es que la teoría de campo efectiva de baja energía para tales estados involucra una teoría de campo topológica [21]. En el caso (2+1)-dimensional la parte dominante de la acción de campo para los fluidos topológicos cuánticos de Hall de baja energía son términos de Chern-Simons. La descripción efectiva del sistema jerárquico fraccional cuántico de Hall con múltiples campos $U(1)$ de norma A^I ($I = 1, \dots, R$) se forma con la acción siguiente sobre la variedad 3-dimensional M^3 [22, 23]:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} \left(\sum_{I,J=1}^R K_{IJ} A^I \wedge dA^J + 2 \sum_{I=1}^R t_I A_{\text{ext}} \wedge dA^I \right), \quad (2)$$

donde K_{IJ} es una matriz tridiagonal entera, t_I se llama vector de carga y A_{ext} es un potencial de fondo o externo. El factor de llenado (filling factor) racional que determina la conductividad de Hall se define como $\nu := t_I K^{IJ} t_J$, donde K^{IJ} es la matriz inversa de K_{IJ} . Es posible interpretar la matriz racional K^{IJ} como matriz de constantes de acoplamiento para la colección de campos abelianos $\{A^I\}$, las cuáles describen el conjunto de casi-partículas que corresponde a los diferentes condensados [14].

Recientemente, unos nuevos fluidos topológicos en tres dimensiones espaciales han atraído mucha atención, son los llamados aislantes topológicos [16, 24], así como los sistemas dinámicos que describen la superconductividad topológica [19] y el confinamiento topológico [20]. Todos estos fluidos topológicos se caracterizan por acciones efectivas de baja energía que contienen términos topológicos BF [21], que son la generalización a más dimensiones de términos de Chern-Simons. Es posible introducir una estructura jerárquica en el modelo BF por medio de un procedimiento del tipo de Kaluza-Klein, es decir, induciendo un espacio de mayor dimensión (en este caso 7-dimensional) que incluya la variedad M^3 y cuya matriz de constantes de acoplamiento sea análoga a la matriz K que caracteriza el efecto jerárquico cuántico de

Hall fraccional. Hemos generado un modelo BF de este tipo en el capítulo 2. Para obtener la jerarquía de las constantes de acoplamiento que existen en nuestro universo, usamos un tipo especial de espacios internos en dicho acercamiento de Kaluza-Klein, las variedades de grafo (ver [25, 26]), que consisten en un número finito de piezas fibradas de Seifert, llamadas piezas JSJ, correspondientes a la descomposición de variedades tridimensionales investigada por Jaco, Shalen [27] y Johannson [28], conocida como descomposición JSJ. Hay que hacer notar que el interés por las variedades fibradas de Seifert apareció en la última década y está conectada con la reconsideración de la teoría de campo de Chern-Simons sobre las variedades de Seifert que poseen estructuras de contacto, que permiten realizar la localización no abeliana [29]. Además, las variedades fibradas de Seifert, en particular los espacios de lentes, son muy útiles para investigar la contribución de los instantones fraccionales a las funciones de partición de agujeros negros [30]. Usamos los métodos de cálculo desarrollados en [31, 32] para calcular las matrices racionales de enlace de las variedades de grafo generadas. Estas matrices de enlace juegan el papel de las matrices K y contienen la información, no sólo de la jerarquía de las constantes de acoplamiento, sino también del fenómeno de ajuste fino (fine tuning) que resulta universal en nuestro modelo.

De acuerdo a lo anterior, la presente tesis genera una variedad de grafo $M(\Gamma_p)$ generada a partir de un caso especial de variedades de Seifert, conocidas como esferas homológicas de Brieskorn (Bh-esferas), unidas mediante la operación conocida como “plumbing”. El armado se sustenta en el espacio de grafo Γ_p (figura 1.3), etiquetado de acuerdo a un invariante topológico bien conocido para una Bh-esfera, el número racional de Euler $e(\Sigma)$ (más detalles en el apéndice A). En el capítulo 1 se demuestra que la matriz entera Laplaciana Q del espacio de grafo Γ_p está relacionada con la matriz de enlace racional K mediante el conocido proceso de diagonalización parcial de Gauss-Neumann [31]. Este proceso de diagonalización parcial nos lleva a poner atención a las fracciones continuas de números racionales ya que observamos que los valores racionales de la matriz K resultan de fracciones continuas de los elementos enteros de la matriz Q .

En el capítulo 2 se propone un modelo topológico de campos de norma (gauge), específicamente una teoría abeliana BF usando un espacio 7-dimensional que incluye la variedad 3-dimensional $M(\Gamma_p)$. Un proceso de tipo Kaluza-Klein induce un conjunto de potenciales 4-dimensionales abelianos de norma A^I cuya matriz de constantes de acoplamiento, como se mencionó antes, resulta análoga a la matriz K que caracteriza el efecto cuántico de Hall fraccional, esto con el objetivo de encontrar una acción en la que la matriz de enlace K juegue el papel de la matriz de constantes de acoplamiento de tipo BF. Es decir, podemos relacionar el invariante topológico (matriz de enlace K) de la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$ con el concepto de jerarquía de constantes de acoplamiento que queremos representar [32].

Un ejemplo específico de representación mediante este modelo se puede encontrar en el capítulo 3. Usamos como elementos básicos de la construcción una secuencia primaria de Bh-esferas, basada en los primeros números primos. Dichas Bh-esferas junto con una operación que llamamos derivada y el pegado “plumbing” nos ayudan a formar un diagrama de “plumbing” (figura 3.1) que incluye cinco subdiagramas Δ_p que modelan espacios de grafo disjuntos (que forman la variedad $M(\Gamma_p)$) que podemos asociar con diferentes etapas de evolución del universo y que, por ende, nos proporciona cinco matrices de enlace K para cada uno de estos subdiagramas. Dichas matrices K se calculan en función de invariantes topológicos de las Bh-esferas y de los espacios de lentes $L(p, q)$ que se forman mediante el “plumbing”. La más importante, $K(0)$ (que representa el subdiagrama $\Delta_p(0)$) nos proporciona la información de la jerarquía basada en nuestro modelo tipo BF. Mostramos que los resultados tienen una jerarquía cercana a cada una de las constantes de acoplamiento de baja energía adimensionales (DLEC por sus siglas en inglés), y después revisamos los resultados para las demás matrices K y, con ellos, proponemos la hipótesis de que podrían representar la jerarquía de las constantes de acoplamientos bajo unificación. Claro que para esta aseveración se tendría que sustentar los resultados en una estructura más completa de la variedad 7-dimensional usada, y no sólo en el enfoque puramente topológico que aquí se presenta.

En los capítulos 4 y 5 se presentan dos resultados que no se pensaban al inicio del programa y que resultaron ser, además de originales, detonantes para nuevas investigaciones. En el capítulo 4, tal como ya se había mencionado, se muestra la presencia de un fenómeno numérico en el cálculo de las matrices K que ligamos con el fenómeno de ajuste fino, que es intrínseco a nuestro modelo y se presenta de manera sorprendente para el cálculo de los invariantes de las Bh-esferas y los espacios de lentes $L(p, q)$ que se forman en las conexiones entre ellas. Por otro lado, en el capítulo 5, se presenta un resultado mucho más importante y derivado de la necesidad de calcular el rango de la matriz Q del espacio de grafo Γ_p . Como se mencionó previamente, se publicó en [31] que la matriz de enlace K de la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$ se puede obtener mediante diagonalización parcial de los elementos de Q . Para el proceso inverso (obtener Q a partir de K), es necesario encontrar el desarrollo como fracción continua de los elementos de K . Como es sabido, el algoritmo que encuentra dicho desarrollo es sencillo y se basa en un proceso repetitivo de divisiones. El problema se presenta al aplicar el algoritmo a los últimos componentes de la matriz K , cuyas fracciones presentan descomposiciones de longitudes imposibles de calcular con los tiempos computacionales existentes. Dado todo lo anterior, fue desarrollado un algoritmo que calcula de forma mucho más compacta los valores de la fracción continua de cualquier fracción, y que, como se presenta en la sección 5.4, permite obtener la fracción continua del último componente en sólo 2 iteraciones (contra las 401912960484965116823 necesarias en el algoritmo tradicional).

Por último, complementamos la información con tres apéndices. El apéndice A contiene teoría básica de los objetos topológicos usados durante el desarrollo. El apéndice B muestra a detalle los cálculos de las matrices K , incluyendo los resultados para los invariantes de las Bh-esferas y los espacios de lentes que se obtienen por la pegadura de dichas esferas. Finalmente, el apéndice C muestra los resultados para las fracciones continuas de la matriz $K(0)$ mediante el algoritmo desarrollado en el capítulo 4, que permiten obtener de manera completa el contenido de la matriz Q para el espacio de grafo Γ_p (cuestión de no poca importancia pues $\text{rank}(Q) = 401912960484965225793$).

Capítulo 1

Espacios de grafo y matriz de enlace

En este capítulo se genera una variedad de grafo $M(\Gamma_p)$ en base a un tipo de grafo particular Γ_p llamado de “plumbing”, tomando como elementos fundamentales esferas homológicas de Brieskorn (Bh-esferas). Se demuestra [31] que si se etiqueta Γ_p con los números de Euler racionales de dichas Bh-esferas, la matriz laplaciana Q de Γ_p está relacionada con la matriz de enlace K de $M(\Gamma_p)$ mediante el proceso de diagonalización parcial de Gauss-Neumann, y por tanto, podemos obtener una a partir de la otra.

1.1. Grafo Γ_p de tipo árbol y su representación como matriz de bloques.

Empezaremos con la definición del grafo Γ como un complejo simplicial finito de dimensión uno, que no contiene múltiples aristas ni bucles (loops), i.e. consideraremos sólo grafos tipo árbol. Se asigna un peso entero e_i a cada vértice de Γ . A los vértices con al menos tres aristas se les llama nodos. Por facilidad usaremos grafos con nodos de valencia mínima ($n=3$) solamente (una generalización para $n \geq 3$ resulta obvia). También supongamos que el conjunto de nodos N del grafo Γ es no vacío. Considerando al grafo Γ como un complejo simplicial unidimensional, tomamos su complemento $\Gamma - N$. Este complemento es la unión disjunta de segmentos de recta las cuales son las cadenas maximales de Γ . La figura 1.1 muestra una cadena maximal interna $\{v_1, \dots, v_k\}$ de longitud k entre dos nodos N^I y N^J , con pesos $\{e_1, \dots, e_k\}$ incluida en un grafo de árbol Γ . La cadena es maximal porque no puede ser incluida en otra cadena más grande. La figura 1.2 muestra una cadena maximal terminal $\{v_1, \dots, v_k\}$ de longitud k también con pesos $\{e_1, \dots, e_k\}$.

En esta tesis consideramos sólo el tipo más simple de grafos a los que se les llama grafos de “plumbing”. Un ejemplo de dicho grafo Γ_p (llamado así por generarse mediante

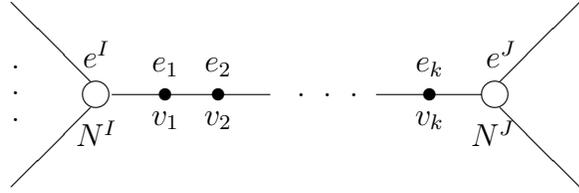


Figura 1.1: Una cadena maximal interna de longitud k .

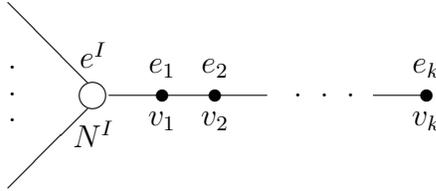


Figura 1.2: Una cadena maximal terminal de longitud k .

la operación “plumbing”) se da en la figura 1.3. Este tipo de grafos se usa para codificar a las variedades de grafo del tipo “plumbing” [33] que construiremos más adelante, donde se podrá ver claramente por qué a los pesos del grafo se les llama números de Euler. En la figura 1.3, los números de Euler e_i^I y e_i^J decoran los vértices con valencias 1 y 2. Los nodos se marcan mediante N^I con $I = 1, \dots, R$ y forman una línea recta o cadena. Asociamos a cada nodo un pesos cero, lo cual está conectado con el uso de invariantes no-normalizados de Seifert para esferas tipo Bh (véase apéndice A), que son los elementos básicos para la construcción de las variedades de grafo [34].

Ahora definamos la matriz Laplaciana para el grafo tipo “plumbing” Γ_p de la siguiente forma:

$$Q^{AB}(\Gamma_p) = \begin{cases} e_A, & \text{si } A = B; \\ -1, & \text{si } A \neq B \text{ y } v_A \text{ está conectado con } v_B \text{ por un arista;} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con los números enteros e_A correspondiendo a cada vértice v_A . Esta es una matriz de bloques que contiene toda la información acerca del grafo Γ_p . El I -ésimo fragmento de la matriz Q^{AB} que corresponde a la I -ésima pieza del grafo Γ_p mostrado en la figura 1.3 es representado como

equivalente a la matriz de bloques racional

$$[e_1] \oplus [e_2, e_1] \oplus \cdots \oplus [e_n, \dots, e_1] \oplus B_{red}$$

donde

$$B_{red} = - \begin{pmatrix} \frac{q}{p} & \frac{1}{p} \\ \frac{1}{p} & \frac{q^*}{p} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

y $\frac{p}{q} = -[e_1, \dots, e_n]$, $\frac{p}{q^*} = -[e_n, \dots, e_1]$, $p = -[e_1][e_2, e_1][e_3, e_2, e_1] \cdots [e_n, \dots, e_1]$. Aquí hemos usado la definición estándar de fracción continua

$$[e_1, \dots, e_n] = e_1 - \frac{1}{e_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{e_n}}} \quad (1.3)$$

Aplicando el método general de diagonalización parcial de Gauss-Neumann a la matriz $Q^{AB}(\Gamma_p)$ obtenemos un resultado similar, donde Q_{red} es una matriz tridiagonal racional de rango R (el número de nodos del grafo Γ_p) cuyos elementos diagonales son una suma de tres términos representando cada cadena maximal que se conecta a dicho nodo:

$$Q_{red}^{IJ}(\Gamma_p) = - \begin{cases} \frac{b^0}{a^0} + \frac{q^1}{p^1} + \frac{b^1}{a^1}, & \text{si } I = J = 1; \\ \frac{q^{*I-1}}{p^{I-1}} + \frac{q^I}{p^I} + \frac{b^I}{a^I}, & \text{si } I = J = 2, \dots, R-1; \\ \frac{q^{*R-1}}{p^{R-1}} + \frac{b^R}{a^R} + \frac{b^{R+1}}{a^{R+1}}, & \text{si } I = J = R \\ \frac{1}{p^I}, & \text{si } J = I-1 \text{ ó } J = I+1 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.4)$$

donde los $\frac{a^I}{b^I} = -[\epsilon_1^I, \dots, \epsilon_{m_I}^I]$ son fracciones continuas para una cadena terminal, y $\frac{p^I}{q^I} = -[e_1^I, \dots, e_{n_I}^I]$ para una cadena interna. Hemos usado la notación q^* para indicar que el orden de los números en la fracción continua es inverso, *i.e.* $\frac{p^I}{q^{*I}} = -[e_{n_I}^I, \dots, e_1^I]$. Así, podemos reducir cada cadena de Γ_p en un número racional $\frac{b}{a}$, $\frac{q}{p}$ ó $\frac{q^*}{p}$ que es representado como una fracción continua, y por lo tanto reducir la matriz de bloques original $Q(\Gamma_p)$ en una matriz tridiagonal $Q_{red}(\Gamma_p)$ cuyo tamaño depende solo del número de nodos de Γ_p . Es importante notar que es posible obtener la matriz original $Q(\Gamma_p)$ a partir de la matriz reducida $Q_{red}(\Gamma_p)$.

1.2. Matriz de enlace racional para una variedad de grafo $M(\Gamma_p)$.

En esta sección construiremos una variedad de grafo tipo “plumbing” $M(\Gamma_p)$ codificada por el mismo grafo Γ_p de la sección 1.1. Ahora vemos el peso e_i como el número de Euler del haz S^1 -($U(1)$ -) principal, correspondiente al i -ésimo vértice v_i . Ahora definimos el haz $M(e_i)$ asociado a cada vértice v_i como el S^1 -haz sobre S^2 con número de Euler e_i , que puede ser pegado de dos haces triviales sobre D^2 como sigue [35, 26]

$$D^2 \times S^1 \cup_{H_i} D^2 \times S^1$$

$$H_i : \partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 = \partial(D^2 \times S^1)$$

donde

$$H_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -e_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y - e_i x \end{pmatrix}.$$

Hay que notar que lo anterior es una descripción común del espacio de lentes $L(e_i, 1)$, así que el espacio total del haz es $M(e_i) = L(e_i, 1)$. Para realizar la operación de pegado, que se conoce como *plumbing* entre los S^1 -haces, debemos usar los haces triviales $M_A(e_i) = A \times S^1 \cup_{H_i} A \times S^1$ donde A es un anillo circular o la esfera S^2 doblemente punteada. La variedad $M(\Gamma_p)$ se pega a partir de las variedades $M_A(e_i)$ como sigue [26]: siempre que los vértices v_i y v_j estén conectados por un arista σ_{ij} en Γ_p pegamos un componente de frontera $S^1 \times S^1$ de $M_A(e_i)$ a un componente de frontera $S^1 \times S^1$ de $M_A(e_j)$ mediante el mapeo $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $A \times S^1 \cup_{H_i} A \times S^1 \cup_J A \times S^1 \cup_{H_j} A \times S^1$, así que las coordenadas de la base y de la fibra son intercambiadas bajo la operación de plumbing. Por lo tanto, la arista σ_{ij} corresponde al toro $T_{ij}^2 = S^1 \times S^1$ a lo largo del cual las piezas $M_A(e_i)$ y $M_A(e_j)$ se unen.

Por ejemplo, el *plumbing* de la cadena mostrada en la figura 1.1 nos da la pegadura

$$M(N^I) \cup_J (A \times S^1 \cup_{H_i} A \times S^1) \cup_J \cdots \cup_J (A \times S^1 \cup_{H_k} A \times S^1) \cup_J M(N^J),$$

donde $M(N^I)$ es un S^1 -haz asociado con el nodo N^I . La cadena entre $M(N^I)$ y $M(N^J)$ corresponde al toro grueso fibrado de Seifert (homeomorfo a $T^2 \times [0, 1]$) en la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$. Además, la cadena maximal terminal mostrada en la figura 1.2 corresponde al toro sólido fibrado de Seifert (homeomorfo a $D^2 \times S^1$) en $M(\Gamma_p)$. El uso de grafos con nodos de valencia $n = 3$ (como en la sección 1.1) corresponde al *plumbing* de esferas homológicas de Brieskorn (Bh-esferas) (véase apéndice A y/o [36]).

Ahora nótese que cada arista σ de Γ_p se relaciona con el toro incrustado $T_\sigma^2 \subset M(\Gamma_p)$ y

la colección de todos estos toros corta a la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$ en una unión disjunta de haces circulares sobre la esfera n veces punteada $S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n p_i$, $1 \leq n \leq 3$, [26, 35]. Tal colección de toros \mathcal{T}_W es llamada una estructura de grafo sobre $M(\Gamma_p)$ por Waldhausen [37]. Ahora bien, queremos definir la subestructura $\mathcal{T}_{JSJ} \subset \mathcal{T}_W$ para la estructura de Waldhausen, que es conocida como estructura de Jaco-Shalen-Johannson (JSJ) del grafo Γ_p , y especificar la correspondiente descomposición JSJ de la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$ en un conjunto de piezas fibradas de Seifert $M_{JSJ}(N^I)$. Denotemos $\mathcal{C}(p)$ al conjunto de cadenas maximales en el grafo Γ_p . Este conjunto puede ser escrito como una unión disjunta $\mathcal{C}(p) = \mathcal{C}_i(p) \sqcup \mathcal{C}_t(p)$, donde $\mathcal{C}_i(p)$ denota el conjunto de cadenas interiores y $\mathcal{C}_t(p)$ el conjunto de cadenas terminales. Las aristas de Γ_p contenidas en una cadena $C \in \mathcal{C}(p)$ corresponden a un conjunto de toros paralelos en $M(\Gamma_p)$. Elijamos un toro T_C^2 entre ellos y definamos

$$\mathcal{T}_{JSJ} = \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_i(p)} T_C^2 \quad (1.5)$$

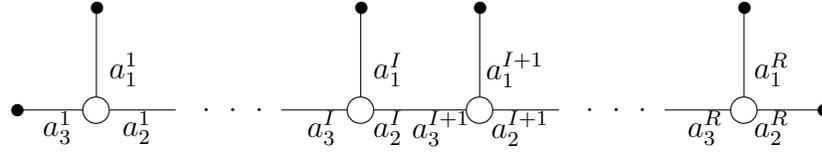
Este conjunto de toros forma la descomposición JSJ de la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$ [38].

Por construcción, cada pieza $M_{JSJ}(N^I)$ (escrita M_{JSJ}^I por facilidad) de la descomposición JSJ que corresponde al nodo N^I contiene una única pieza $M_W(N^I)$ (que escribiremos M_W^I) de la descomposición de Waldhausen asociada al mismo nodo N^I . Se puede extender de una manera única salvo una isotopía la estructura natural de Seifert sin fibras excepcionales en M_W^I a una fibración de Seifert en M_{JSJ}^I con fibras excepcionales. Por lo tanto, la descomposición JSJ de la variedad $M(\Gamma_p)$ está definida completamente por $M(\Gamma_p) = \bigcup_{I=1}^R \bar{M}_{JSJ}^I$, donde R es el número de nodos en Γ_p y la barra sobre M significa cerradura de M_{JSJ}^I .

Hay que hacer notar que existe cierta incertidumbre en la elección del toro T_C^2 para cada cadena interna que aparece en la estructura JSJ (1.5). Podemos remover este problema de la siguiente forma: hagamos la extensión máxima de la fibración natural de Seifert de cada M_W^I y escribamos la pieza única fibrada de Seifert obtenida de $M(\Gamma_p)$ como \hat{M}^I . Es claro que $\hat{M}^I \cap \hat{M}^J \neq \emptyset$ si y sólo si existe una cadena C_{IJ} uniendo los nodos N^I y N^J . Si empezamos haciendo “plumbing” de las R Bh-esferas $\{\Sigma(a_1^I, a_2^I, a_3^I) | I = 1, \dots, R\}$, la resultante variedad de grafo 3-dimensional será una esfera homológica entera [26, 36] (esfera \mathbb{Z} -homológica), que en el caso general no tiene una fibración global de Seifert. Pero podemos construir una cubierta JSJ $\mathcal{M} := \{\hat{M}^I | I = 1, \dots, R\}$, tal que cada \hat{M}^I sea un espacio fibrado de Seifert y sea maximal en el sentido descrito antes.

Supongamos que realizamos la operación de “plumbing” de acuerdo al diagrama Δ_p , mostrado en la figura 1.4. Por lo tanto, nuestros diagramas de “plumbing” siempre tendrán pesos primos relativos alrededor de cada nodo correspondiendo a esferas \mathbb{Z} -homológicas [33].

Además, suponemos que el orden de los invariantes de Seifert a_i^I es el siguiente: $a_1^1 < a_3^1 <$


 Figura 1.4: Diagrama de "plumbing" Δ_p .

a_2^1 y $a_1^I < a_2^I < a_3^I$ para $I \geq 2$. En este caso, la matriz entera de enlace (forma de intersección) $Q(\Gamma_p)$ que corresponde al grafo Γ_p está definida (positiva o negativa) si y solo si

$$a_2^I a_3^{I+1} > a_1^I a_3^I a_1^{I+1} a_2^{I+1}, \quad (1.6)$$

para $I = 1, \dots, R - 1$ [33]. W. Neumann mostró en [25] que esta condición también asegura que la matriz reducida Q_{red}^{IJ} está definida.

Construimos el grafo tipo "plumbing" Γ_p para una esfera \mathbb{Z} -homológica, siguiendo [33, 35, 26] (así obtendremos un grafo del tipo mostrado en la figura 1.3). Antes que nada calculamos las características de las cadenas maximales. Para las cadenas terminales, los números de Euler ϵ_i^I se definen mediante la fracción continua:

$$-\frac{a^I}{b^I} = [\epsilon_1^I, \dots, \epsilon_{m_I}^I], \quad (1.7)$$

donde (a^I, b^I) , $I = 0, \dots, R + 1$ son los invariantes de Seifert, numerados de la siguiente manera

$$a^0 = a_3^1, \quad b^0 = b_3^1; \quad a^J = a_1^J, \quad b^J = b_1^J, \quad J = 1, \dots, R; \quad a^{R+1} = a_2^R, \quad b^{R+1} = b_2^R. \quad (1.8)$$

Para las cadenas internas los números de Euler e_i^I se definen como

$$-\frac{p^I}{q^I} = [e_1^I, \dots, e_{n_I}^I], \quad (1.9)$$

donde los invariantes de Seifert (p^I, q^I) , $I = 1, \dots, R - 1$ caracterizan a los toros gruesos (thick tori) $TT(p^I, q^I) \cong T^2 \times [0, 1]$, que se crean por "plumbing" entre los nodos N^I y N^{I+1} , ver [34, 26]. Estos invariantes también identifican los espacios de lentes $L(p^I, q^I)$ que aparecen en el V-cobordismo cuatro dimensional [34] (correspondiente al grafo Γ_p) con

$$\begin{aligned} p^I &= a_2^I a_3^{I+1} - a_1^I a_3^I a_1^{I+1} a_2^{I+1}, \\ q^I &= b_2^I a_3^{I+1} + a_1^{I+1} a_2^{I+1} (b_1^I a_3^I + a_1^I b_3^I) \end{aligned}$$

para el orden fijado por el diagrama de la figura 1.4. De esta representación es claro que para $I = 2, \dots, R - 1$ el conjunto \hat{M}^I de cubiertas JSJ \mathcal{M} tiene la forma

$$\hat{M}^I = \bar{M}_W^I \cup TT(p^{I-1}, q^{*I-1}) \cup TT(p^I, q^I) \cup ST(a^I, b^I), \quad (1.10)$$

donde $ST(a^I, b^I)$ es un toro sólido fibrado de Seifert con invariantes (a^I, b^I) y

$$-\frac{p^I}{q^{*I}} = [e_{n_I}^I, \dots, e_1^I], \quad (1.11)$$

Para los casos de $I = 1$ y $I = R$ las fórmulas difieren de (1.10), obteniéndose:

$$\hat{M}^1 = \bar{M}_W^1 \cup TT(p^1, q^1) \cup ST(a^0, b^0) \cup ST(a^1, b^1), \quad (1.12)$$

$$\hat{M}^R = \bar{M}_W^R \cup TT(p^{R-1}, q^{*R-1}) \cup ST(a^R, b^R) \cup ST(a^{R+1}, b^{R+1}). \quad (1.13)$$

Además $\hat{M}^I \cap \hat{M}^{I+1} = TT(p^I, q^I) \cong^* TT(p^I, q^{*I})$ $I = 2, \dots, R - 1$. Aquí el símbolo \cong^* indica que $TT(p^I, q^I)$ y $TT(p^I, q^{*I})$ son homeomorfos, pero sus estructuras de Seifert son caracterizadas por diferentes números de Euler definidos por las ecuaciones (1.9) y (1.11) respectivamente. De este modo, el toro grueso entre los nodos N^I y N^{I+1} tiene dos fibraciones de Seifert: la primera es la extensión de la fibración natural de Seifert definida sobre la pieza M_W^I y la segunda se obtiene como extensión de la pieza M_W^{I+1} . Estas fibraciones están conectadas por la matriz [26, 34]:

$$S^I = \begin{pmatrix} -q^I & p^{*I} \\ p^I & q^{*I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -e_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -e_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -e_n & 1 \end{pmatrix},$$

de la siguiente forma. Nótese que las aristas de Γ_p contenidas en la cadena $C_{I,I+1}$ (entre los nodos N^I y N^{I+1}) corresponden al conjunto de toros paralelos en $M(\Gamma_p)$. En cualquiera de estos toros existen dos bases formadas por las líneas de sección y las fibras que pertenecen a las fibraciones de Seifert extendidas desde M_W^I y M_W^{I+1} , que denotamos como el par de columnas

$$\begin{pmatrix} s_2^I \\ f_I \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} s_3^{I+1} \\ f_{I+1} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Los subíndices 2 y 3 indican que $\Sigma(a_1^I, a_2^I, a_3^I)$ y $\Sigma(a_1^{I+1}, a_2^{I+1}, a_3^{I+1})$ se pegan a lo largo de las fibras singulares con invariantes de Seifert a_2^I y a_3^{I+1} , como se muestra en la figura 1.4. Así,

la transformación entre estas bases se describe mediante

$$\begin{pmatrix} s_2^I \\ f_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q^I & p^*{}^I \\ p^I & q^*{}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_3^{I+1} \\ f_{I+1} \end{pmatrix},$$

donde $p^*{}^I$ es definida a partir de $\det S^I = -(q^I q^*{}^I + p^I p^*{}^I) = -1$.

Ahora introducimos las 1-formas base (σ_I^2, κ^I) y $(\sigma_{I+1}^3, \kappa^{I+1})$, duales a las bases (1.14) en el sentido que:

$$\begin{aligned} \int_{s_2^I} \sigma_I^2 &= \int_{s_3^{I+1}} \sigma_{I+1}^3 = \int_{f_I} \kappa^I = 1; \\ \int_{f_I} \sigma_I^2 &= \int_{f_{I+1}} \sigma_{I+1}^3 = \int_{s_2^I} \kappa^I = \int_{s_3^{I+1}} \kappa^{I+1} = 0, \end{aligned}$$

donde las integrales se calculan sobre cualquier sección o fibra como, por ejemplo, en [29]. Por lo tanto, obtenemos las transformaciones correspondientes entre las 1-formas duales:

$$\sigma_I^2 = -q^*{}^I \sigma_{I+1}^3 + p^I \kappa^{I+1}; \quad \kappa^I = p^*{}^I \sigma_{I+1}^3 + q^I \kappa^{I+1}. \quad (1.15)$$

Suponemos que las formas σ y κ son duales respecto al mapeo bilineal definido como

$$\langle \sigma_I^2, \kappa^J \rangle := \int_{\hat{M}^I \cap \hat{M}^J} \sigma_I^2 \wedge d\kappa^J = \delta_I^J; \quad \langle \sigma_{I+1}^3, \kappa^J \rangle := \int_{\hat{M}^{I+1} \cap \hat{M}^J} \sigma_{I+1}^3 \wedge d\kappa^J = \delta_{I+1}^J, \quad (1.16)$$

También usaremos las integrales

$$\Lambda^{I,I+1} = \int_{TT(p^I, q^I)} \kappa^I \wedge d\kappa^{I+1}; \quad \Lambda^{I,I} = \int_{TT(p^I, q^I)} \kappa^I \wedge d\kappa^I; \quad \Lambda^{I+1,I+1} = \int_{TT(p^I, q^*{}^I)} \kappa^{I+1} \wedge d\kappa^{I+1},$$

que definen los números de enlace (intersección) de las estructuras fibradas κ^I y κ^{I+1} definidas sobre los toros gruesos $TT(p^I, q^I) \cong^* TT(p^I, q^*{}^I)$. Podemos obtener la matriz de enlace racional para $TT(p^I, q^I) \cong^* TT(p^I, q^*{}^I)$ en términos de la multiplicación de las ecuaciones (1.15) por $d\kappa^I$ y $d\kappa^{I+1}$ e integrando sobre $TT(p^I, q^I) \cong^* TT(p^I, q^*{}^I)$. Aplicando las condiciones de dualidad (1.16) obtenemos:

$$\Lambda^{I,I+1} = \Lambda^{I+1,I} = \frac{1}{p^I} \quad \Lambda^{I,I} = \frac{q^I}{p^I}; \quad \Lambda^{I+1,I+1} = \frac{q^*{}^I}{p^I}. \quad (1.17)$$

Los números racionales $\Lambda^{I,I}$ y $\Lambda^{I+1,I+1}$ se conocen también como las clases de Chern de los V-haces lineales asociados a las fibraciones de Seifert con las formas de conexión invariantes ante $U(1)$, κ^I y κ^{I+1} sobre los espacios de lentes $L(p^I, q^I)$ y $L(p^I, q^*{}^I)$ respectivamente [29].

Ahora ya podemos calcular la matriz de enlace racional para la variedad de grafo $-M(\Gamma_p)$ (figura 1.3):

$$K^{IJ} = - \int_{M(\Gamma_p)} \kappa^I \wedge d\kappa^J. \quad (1.18)$$

Aquí integramos sobre $-M(\Gamma_p)$ para obtener una matriz de enlace definida positivamente. Esta variedad tiene la orientación opuesta con respecto a $M(\Gamma_p)$ que se obtiene por “plumbing” directo de las Bh-esferas.

Por la estructura de árbol del grafo Γ_p , y de la primera ecuación en (1.17) obtenemos que para $I \neq J$ los únicos elementos no cero son

$$K^{I,I+1} = K^{I+1,I} = - \int_{\hat{M}^I \cap \hat{M}^{I+1}} \kappa^I \wedge d\kappa^{I+1} = - \int_{TT(p^I, q^I)} \kappa^I \wedge d\kappa^{I+1} = -\frac{1}{p^I},$$

para $1 \leq I \leq R-1$.

Si $I = J = 2, \dots, R-1$, tenemos

$$\begin{aligned} K^{II} &= - \int_{\hat{M}^I} \kappa^I \wedge d\kappa^I = \\ &= - \int_{TT(p^{I-1}, q^{*I-1})} \kappa^I \wedge d\kappa^I - \int_{TT(p^I, q^I)} \kappa^I \wedge d\kappa^I - \int_{ST(a^I, b^I)} \kappa^I \wedge d\kappa^I. \end{aligned}$$

Aquí estamos usando la descomposición (1.10) de la pieza \hat{M}^I , y que la integral sobre las fibriciones triviales de Seifert \bar{M}_W^I es cero. Entonces, de acuerdo a las dos últimas ecuaciones en (1.17) obtenemos el elemento de la matriz

$$K^{II} = - \left(\frac{q^{*I-1}}{p^{I-1}} + \frac{q^I}{p^I} + \frac{b^I}{a^I} \right), \quad (1.19)$$

que también se conoce como clase de Chern del V -haz lineal asociado con la fibrición de Seifert de \hat{M}^I .

Para $I = 1$ e $I = R$ los elementos de la matriz son

$$\begin{aligned} K^{11} &= - \int_{\hat{M}^1} \kappa^1 \wedge d\kappa^1 = \\ &= - \int_{ST(a^0, b^0)} \kappa^1 \wedge d\kappa^1 - \int_{TT(p^1, q^1)} \kappa^1 \wedge d\kappa^1 - \int_{ST(a^1, b^1)} \kappa^1 \wedge d\kappa^1; \quad (1.20) \\ K^{RR} &= - \int_{\hat{M}^R} \kappa^R \wedge d\kappa^R = \end{aligned}$$

$$-\int_{TT(p^{R-1}, q^{*R-1})} \kappa^R \wedge d\kappa^R - \int_{ST(a^R, b^R)} \kappa^R \wedge d\kappa^R - \int_{ST(a^{R+1}, b^{R+1})} \kappa^R \wedge d\kappa^R; \quad (1.21)$$

$$K^{11} = -\left(\frac{b^0}{a^0} + \frac{q^1}{p^1} + \frac{b^1}{a^1}\right); \quad K^{RR} = -\left(\frac{q^{*R-1}}{p^{R-1}} + \frac{b^R}{a^R} + \frac{b^{R+1}}{a^{R+1}}\right), \quad (1.22)$$

donde usamos las descomposiciones (1.12) y (1.13) así como las notaciones mostradas en (1.8).

Comparando la matriz reducida $Q_{\text{red}}(\Gamma_p)$ (1.4) con los resultados (1.19) y (1.22) para la matriz de enlace racional K de la variedad de grafo $-M(\Gamma_p)$ observamos que $K = Q_{\text{red}}(\Gamma_p)$. Por lo tanto, descomponiendo los invariantes racionales en fracciones continuas conforme con (1.7), (1.9) y (1.11), podemos crear el grafo Γ_p (relacionado con el diagrama Δ_p) y obtener la matriz de enlace racional K de $-M(\Gamma_p)$ simplemente mediante la diagonalización de Gauss-Neumann de la matriz entera Laplaciana de Γ_p .

Capítulo 2

Modelo topológico BF 7-dimensional

En este capítulo construiremos un modelo topológico de norma, a saber, una teoría abeliana BF sobre un espacio 7-dimensional $X^4 \times M_+^3$ topológicamente no trivial, donde la 3-variedad interna pertenece a la clase de las variedades de grafo $M_+^3 = -M(\Gamma_p)$, que tiene orientación opuesta en relación a la variedad $M(\Gamma_p)$ obtenida mediante plumbing de acuerdo al grafo mostrado en la figura 1.3. En este modelo, las matrices de enlace de las variedades de grafo M_+^3 juegan el papel del conjunto de constantes de acoplamiento de tipo BF.

Empezaremos con la acción BF 7-dimensional

$$S_7 = m_0 k \int_{X^4 \times M_+^3} B_3 \wedge F_4, \quad (2.1)$$

donde k es una constante de acoplamiento BF y m_0 es un parámetro de escala para la masa. La reducción al espacio tiempo 4-dimensional X^4 se realiza tomando el siguiente ansatz para las 3- y 4-formas B_3 y F_4 :

$$B_3 = \left(B_I \otimes \kappa^I - \frac{1}{m_0 k} F_D^I \otimes \sigma_I \right) + \left(F_I \otimes \kappa^I + \frac{1}{m_0 k} dH_D^I \otimes \sigma_I \right); \quad (2.2)$$

$$F_4 = \left(F_I \otimes d\kappa^I + \frac{1}{m_0 k} dH_D^I \otimes d\sigma_I \right) = d \left(A_I \otimes d\kappa^I + \frac{1}{m_0 k} H_D^I \otimes d\sigma_I \right). \quad (2.3)$$

Aquí $\{\kappa^I | I = 1, \dots, R\}$ son 1-formas de conexión $U(1)^R$ y $\{\sigma_I | I = 1, \dots, R\}$ son sus 1-formas duales en el sentido de que

$$\int_{M_+^3} \sigma_I \wedge d\kappa^J = \int_{M_+^3} d\sigma_I \wedge \kappa^J = \delta_I^J. \quad (2.4)$$

Las 2-formas F_I , F_D^I y B_I pertenecen al complejo $C_{dR}^2(X^4)$ de cocadenas de deRham y $H_D^I \in C_{dR}^1(X^4)$ [39, 40]. Hay que hacer notar que localmente $F_I = dA_I$, donde los A_I son

potenciales abelianos.

Insertando este ansatz en la acción (2.1) y realizando la integración sobre la variedad de grafo $M_+^3 = -M(\Gamma_p)$ obtenemos una versión $U(1)^R$ del modelo BF

$$S_4 = \int_{X^4} \left(m_0 k K^{IJ} B_I \wedge F_J + B_I \wedge dH_D^I - F_I \wedge F_D^I - \frac{1}{m_0 k} K_{IJ} F_D^I \wedge dH_D^J + m_0 k K^{IJ} F_I \wedge F_J + 2F_I \wedge dH_D^I + \frac{1}{m_0 k} K_{IJ} dH_D^I \wedge dH_D^J \right), \quad (2.5)$$

donde $K^{IJ} = \int_{M_+^3} \kappa^I \wedge d\kappa^J$ es la matriz racional de enlace definida en (1.18). La matriz K_{IJ} , inversa a esta matriz racional de enlace, representa la matriz de entradas enteras para el tipo de variedad de grafo que consideramos en esta tesis. El ansatz (2.2), (2.3) y la acción (2.5) son invariantes bajo la vasta colección de transformaciones topológicas:

$$A_I \rightarrow A_I + u_I; \quad H_D^I \rightarrow H_D^I - m_0 k K^{IJ} u_J; \quad (2.6)$$

$$B_I \rightarrow B_I + v_I; \quad F_D^I \rightarrow F_D^I + m_0 k K^{IJ} v_J, \quad (2.7)$$

donde las u_I son 1-formas arbitrarias y las v_I son 2-formas arbitrarias. Estas simetrías se rompen eligiendo las condiciones de calibración (2.17). Los últimos tres términos en (2.5) constituyen la parte frontera de la acción. Esta acción frontera tiene la siguiente forma

$$S_{\text{boundary}} = \int_{\partial X^4} \left(m_0 k K^{IJ} A_I \wedge dA_J + 2H_D^I \wedge dA_I + \frac{1}{m_0 k} K_{IJ} H_D^I \wedge dH_D^J \right), \quad (2.8)$$

que hace pensar en la acción del sistema fraccional cuántico de Hall (FQH por sus siglas en inglés). Si definimos el conjunto de campos de norma $U(1)$ de fondo (background) $A_{\text{bg}}^I = \frac{1}{m_0} H_D^I$, entonces esta acción puede verse como

$$S_{\text{boundary}} = m_0 \int_{\partial X^4} \left(k K^{IJ} A_I \wedge dA_J + 2A_{\text{bg}}^I \wedge dA_I + \frac{1}{k} K_{IJ} A_{\text{bg}}^I \wedge dA_{\text{bg}}^J \right). \quad (2.9)$$

Con base en [41] elegimos $k = \det(K_{IJ})$ y S_{boundary} convierte (excepto por el factor común m_0) en un análogo de la acción de sistema FQH con R campos de fondo, como fue definido en la sección 3 de [42], de ahí podemos asumir que

$$A_{\text{bg}}^I = t^I A_{\text{ext}}, \quad (2.10)$$

aquí t^I es un vector de carga del fluido de Hall topológico [15]. Bajo estas suposiciones

obtenemos la acción para el sistema jerárquico FQH con un único campo “externo” A_{ext} :

$$S_{\text{FQH}} = m_0 \int_{\partial X^4} \left(\tilde{K}^{IJ} A_I \wedge dA_J + 2t^I A_{\text{ext}} \wedge dA_I + \tilde{K}_{IJ} t^I t^J A_{\text{ext}} \wedge dA_{\text{ext}} \right), \quad (2.11)$$

donde $\tilde{K}^{IJ} = \det(K_{IJ})K^{IJ}$ es una matriz entera tridiagonal, que junto con el vector de carga t^I , caracteriza los estados jerárquicos de Hall generalizados [14], y $\tilde{K}_{IJ} = K_{IJ}/\det(K_{IJ})$ es la matriz racional inversa a \tilde{K}^{IJ} (ver fórmula 2 en la Introducción). El factor de llenado $\nu = \tilde{K}_{IJ} t^I t^J$ describe la conductividad $\sigma = \nu/2\pi$ del fluido de Hall topológico.

Con las corrientes J_I definidas como $J_I = (1/2\pi) * dA_I$, las ecuaciones de movimiento

$$\tilde{K}^{IJ} dA_J + t^I dA_{\text{ext}} = 0, \quad (2.12)$$

para la acción (2.11) quedan como

$$J_I = -(1/2\pi) \tilde{K}_{IJ} t^J * dA_{\text{ext}}. \quad (2.13)$$

Aquí el operador de Hodge $*$ es definido con respecto a la frontera ∂X^4 . Finalmente obtenemos

$$t^I * J_I = (\nu/2\pi) dA_{\text{ext}} = \sigma F_{\text{ext}}, \quad (2.14)$$

que es una bien conocida ecuación del efecto FQH. Hay que hacer notar que esta ecuación puede ser también obtenida por la variación de (2.11) con respecto a A_{ext} . Así que, sobre la frontera espacial no trivial ∂X^4 , la acción (2.5) induce el efecto jerárquico FQH.

Podemos suponer que la parte principal (bulk part) de la acción (2.5)

$$S_4^{\text{bulk}} = \int_{X^4} \left(m_0 k K^{IJ} B_I \wedge F_J - F_I \wedge F_D^I + B_I \wedge dH_D^I - \frac{1}{m_0 k} K_{IJ} F_D^I \wedge dH_D^J \right) \quad (2.15)$$

describe un sistema jerárquico de “cuasipartículas” en el espacio tiempo 4-dimensional que es análogo a los fluidos topológicos fraccionales [16, 18, 22]. Se mostrará que esta acción contiene el efecto topológico de generación de masa, que hace remembranza con el investigado en [43] y permite describir el fenómeno de orden topológico en sistemas dinámicos que poseen estados base con una rendija de masa para todas las excitaciones [19].

Ahora estamos interesados en la derivación de las ecuaciones clásicas obtenidas de la acción (2.5), y así los términos de frontera no afecten el resultado. Así que podemos considerar sólo los primeros cuatro términos de la acción y reescribirlos (salvo el término de frontera)

de la forma siguiente

$$S_{\text{BF}} = \int_{X^4} \left(m_0 k K^{IJ} B_I \wedge F_J - F_I \wedge F_D^I - H_I \wedge H_D^I - \frac{1}{m_0 k} K_{IJ} F_D^I \wedge dH_D^J \right), \quad (2.16)$$

donde $H_I = dB_I$. La matriz de enlace racional K^{IJ} puede ser interpretada como una *matriz de constantes de acoplamiento* del tipo BF, y por lo menos la matriz K^{IJ} describa la jerarquía de las constantes de acoplamiento de norma (gauge), salvo el factor de escala adimensional k . Existe un extenso conjunto de modelos de Kaluza-Klein, en los que las colecciones de constantes de acoplamiento son determinadas principalmente por las matrices de enlace (de intersección) de los espacios internos [44, 45, 46].

Elijamos las siguientes condiciones de calibración:

$$F_D^I = \frac{1}{2} K^{IJ} * F_J; \quad H_D^I = \frac{1}{2} K^{IJ} * H_J, \quad (2.17)$$

que rompe las simetrías topológicas (2.6) y (2.7) de la acción (2.16) (aquí el operador de Hodge $*$ se define con respecto al espacio tiempo 4-dimensional X^4). Entonces resulta

$$S_{\text{calibr}} = \int_{X^4} K^{IJ} \left(m_0 k B_I \wedge F_J - \frac{1}{2} F_I \wedge * F_J - \frac{1}{2} H_I \wedge * H_J - \frac{1}{4m_0 k} * F_I \wedge d * H_J \right). \quad (2.18)$$

Hay que notar que esta acción difiere, de aquella que describe la teoría efectiva de baja energía de superconductores con orden topológico dada en [19], solo por el último término. Además, la acción (2.18) tiene dos simetría de norma $U(1)^R$ bajo las transformaciones

$$A_I \rightarrow A_I + \xi_I, \quad B_I \rightarrow B_I + \eta_I, \quad (2.19)$$

donde ξ_I y η_I son 1-formas y 2-formas cerradas respectivamente. Estas transformaciones dan una generalización de las simetrías de norma de la acción de materia topológica para las superconductividad topológica considerada en [20].

Variando (2.18) con respecto a B_I y A_I , obtenemos

$$(\square - m^2) F_I = 2m d * H_I; \quad (2.20)$$

$$(\square - m^2) H_I = -2m d * F_I, \quad (2.21)$$

donde $\square = d * d * + * d * d$ es el Laplaciano y $m = 2m_0 k$ es una masa topológica [19]. La masa topológica juega el papel de una rendija (gap), caracterizando el estado base de los fluidos topológicos, y al mismo tiempo determina la densidad de energía al vacío para la teoría de campo efectiva de baja energía, que surge como una teoría de campo topológico [21]. Hay que

notar que dicha rendija aparece aquí a partir de un mecanismo topológico [19, 20] y no de un parámetro de orden local adquiriendo un valor esperado de vacío. Un mecanismo análogo para la generación de la masa topológica es descrito en [43].

Las ecuaciones (2.20) y (2.21) son las ecuaciones de Klein-Gordon para los campos masivos F_I y H_I con fuentes. El sentido físico de estas ecuaciones dinámicas se vuelve más claro si las reescribimos en términos de corrientes de “carga eléctrica”

$$J_I^e = *H_I, \quad (2.22)$$

y sus corrientes duales de “flujo magnético”

$$J_m^I = K^{IJ} *F_I, \quad (2.23)$$

análogas a las que se introdujeron en [19, 20]. Las ecuaciones dinámicas para estas corrientes generalizadas quedan como

$$(\square - m^2) *J_m^I = -2m K^{IJ} dJ_J^e; \quad (2.24)$$

$$(\square - m^2) *J_I^e = -2m K_{IJ} dJ_m^J. \quad (2.25)$$

Estas ecuaciones nos dicen que las corrientes de “flujo magnético” son fuentes para las corrientes de “carga eléctrica” y viceversa.

Las corrientes de materia J_I^e y J_m^I describen las excitaciones alrededor de un estado (de vacío) de orden topológico y su teoría de campo efectiva es formulada por estas excitaciones como un modelo de norma con la acción

$$S_{\text{calibr}} = \frac{1}{2} \int_{X^4} \left(m K^{IJ} A_I \wedge *J_J^e + K_{IJ} J_m^I \wedge *J_m^J + K^{IJ} J_I^e \wedge *J_J^e - \frac{1}{m} J_m^I \wedge dJ_I^e \right), \quad (2.26)$$

obtenida de (2.18). En esta acción, así como en (2.16), la matriz racional de enlace K^{IJ} juega el rol de las matrices jerárquicas de constantes de acoplamiento de tipo BF.

Capítulo 3

Representación topológica del espacio-tiempo

En este capítulo construiremos una colección de variedades de grafo $M(\Gamma)$ usando como elementos base una secuencia primaria de Bh-esferas y sus derivadas. El objetivo es calcular la matriz racional de enlace K para cada una de dichas variedades y utilizar los resultados para mostrar su relación con la jerarquía de las constantes de acoplamiento y demostrar que en dichos cálculos aparece el fenómeno de ajuste fino (fine tuning).

3.1. Secuencia primaria de Bh-esferas.

Iniciaremos la construcción del modelo definiendo una secuencia de Bfh-esferas a las que llamaremos **secuencia primaria** [47]. Sea p_i el i -ésimo número primo, es decir, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$. La secuencia primaria de Bh-esferas esta definida como

$$\{\Sigma_+(p_{2n}, p_{2n+1}, q_{2n-1}) | n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (3.1)$$

donde $p_0 = q_{-1} = 1$ y $q_i = p_1 \cdots p_i$. Ejemplos de dichas Sfh-esferas son $\Sigma(3, 5, 2), \Sigma(7, 11, 30), \Sigma(13, 17, 2310) \dots$. También incluimos en esta secuencia, como su primer término, una esfera tridimensional ordinaria S^3 con fibración de Seifert determinada por los mapeos

$$h_{pq} : S^3 \rightarrow S^2 \quad (3.2)$$

los cuales, están definidos como

$$h_{pq}(z_1, z_2) = z_1^p / z_2^q, \quad p, q \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

Recordemos que

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}, \quad (3.4)$$

y

$$z_1^p/z_2^q \in \mathbb{C} \cup \infty \cong S^2. \quad (3.5)$$

El mapeo h_{pq} , describe a la esfera S^3 en términos de fibración de Seifert sobre la orbivariiedad (orbifold) $S^2(p, q)$, isomorfo a la esfera S^2 con dos puntos cónicos caracterizados por los ángulos $2\pi/p$ y $2\pi/q$. Denotemos esta esfera tridimensional como $\Sigma(1, 1, 2)$, $p = 1$, $q = 2$. La estructura de fibración de Seifert es fijada por los números p y q , pero esta no es única. Formalmente, esta esfera es análoga a las Sfh-esferas. En la notación se usa un número adicional en la primer entrada (1) que corresponde a una órbita regular arbitraria, esto nos permitirá operar con $\Sigma(1, 1, 2)$ de la misma manera que con los otros elementos de la secuencia.

Así, tomamos la secuencia primaria de 5 Bh-esferas

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum (1, 1, 2), \\ S_1 &= \sum (3, 5, 2), \\ S_2 &= \sum (7, 11, 30), \\ S_3 &= \sum (13, 17, 2310), \\ S_4 &= \sum (19, 23, 510510), \end{aligned} \quad (3.6)$$

y adoptamos la convención de llamar $a_{i,j}$ a los primos que representan las fibras de las esferas de forma que $S_n = \Sigma(a_{n1}, a_{n2}, a_{n3})$. Así, por ejemplo, a_{23} representa la tercera fibra de la esfera S_2 , es decir, $a_{23} = 30$.

3.2. k-derivada de una Bh-esfera.

Dada una Bh-esfera $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ definimos su k-derivada como la Bh-esfera

$$\Sigma^{(1)}(a_1, a_2, a_3) := \Sigma(a_1, \sigma_1, ak + 1) = \Sigma(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}), \quad (3.7)$$

donde $\sigma_1 = a_1 a_2 a_3 / a_1 = a_2 a_3$, $a = a_1 a_2 a_3$ y k es una constante entera positiva, dicha Bh-esfera posee invariantes de Seifert

$$(a_i^{(1)}, b_i^{(1)}) = \{(a_1, b_1), (\sigma_1, \delta_1), (ak + 1, -1)\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

donde $\delta_1 = b_2 a_3 + b_3 a_2$.

Dado que cualquier Sfh-esfera tiene fibraciones de Seifert únicas, el significado de derivada de la esfera homológica coincide con el de derivada de la estructura fibrada de Seifert.

Por inducción, definimos la derivada $\sum^{(l)}(a_1, a_2, a_3) = \sum \left(a_1^{(l)}, a_2^{(l)}, a_3^{(l)} \right)$ para cualquier orden l . En particular se cumple la relación de recurrencia

$$a^{(l)} = a^{(l-1)} (a^{(l-1)} + 1), \quad (3.9)$$

para el producto de tres invariantes de Seifert $a^{(l)} = a_1^{(l)} a_2^{(l)} a_3^{(l)}$.

3.3. Diagrama de plumbing.

De acuerdo con la interpretación general del modelo topológico BF del capítulo 2, las matrices de enlace juegan el papel de las matrices de constantes de acoplamiento. Ya que nuestro universo está caracterizado por al menos cinco interacciones de baja energía (incluyendo la cosmológica), y dado que nuestro modelo debe ser congruente con este hecho observacional, la matriz racional de enlace K del espacio interno de nuestra variedad de grafo debe tener rango $R \geq 5$.

Para generar dicha variedad, tomamos la secuencia primaria y calculamos las k -derivadas de cada Bh-esfera para formar el diagrama de “plumbing” mostrado en la figura 3.1, donde se puede observar que $e = n - l$. El número de Bh-esferas correspondiente al parámetro e , coincide con el rango $R(e)$ de la matriz racional de enlace $K^{IJ}(e)$ calculada de los subdiagramas $\Delta_p(e)$ generados al conectar verticalmente las Bh-esferas (ver figura 1.4), y en consecuencia coincide con el número de interacciones de norma definidas por el espacio interno formado por la variedad de grafo $M(e) = -M(\Gamma_p(e))$. Por último, debido a la interpretación, cada matriz racional de enlace debe ser definida positiva. Para garantizar esto, debemos asegurarnos que se cumpla la condición (1.6) para la variedad de grafo $M(\Gamma_p(e))$ definida negativa obtenida directamente del “plumbing” de las Bh-esferas y luego calcular la matriz $K^{IJ}(e)$ para la variedad $-M(\Gamma_p(e))$ con la fórmula (1.18).

Ahora procedemos a construir los espacios internos $M(e)$ para cada uno de los subdiagramas $\Delta_p(e)$ de la figura 3.1. Los invariantes de Seifert de las Bh-esferas están escritos de la forma $a_{ni}^{(l)}$, pero también se pueden representar como $a_i^I(e)$, con $I = l + 1$, para usar la misma notación de la figura 1.4 con el parámetro adicional e , que numera los diagramas de plumbing disjuntos como en la figura 3.1. Así podemos observar que el diagrama de la figura 3.1 consiste en cinco subdiagramas “plumbing”, cada uno de la forma del mostrado en la figura 1.4. Claramente existen diferentes maneras de realizar el pegado en cada diagrama,

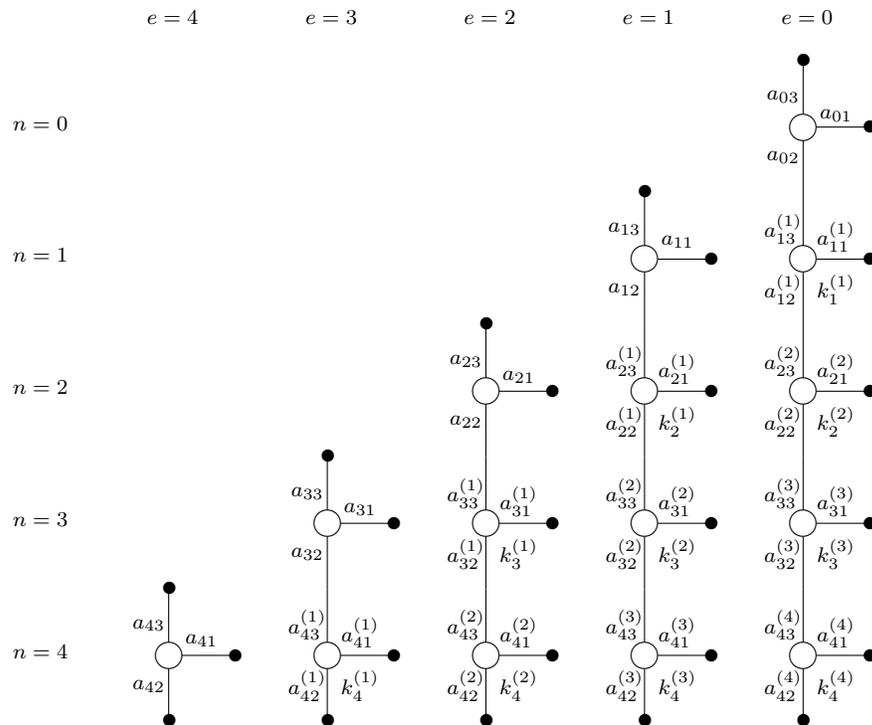


Figura 3.1: Diagrama de "plumbing"

respetaremos el orden de las fibras propuesto en el capítulo 1. Por otro lado, los números k para la k -derivada se escriben con dos índices, $k_n^{(l)}$, estos valores garantizarán que las matrices de enlace de cada una de las variedades de grafo se definan positivamente. Para esto imponemos una condición de minimización de los coeficientes $k_n^{(l)}$ en cada nivel en el que se realice la k -derivada, de forma que podamos garantizar mediante la condición (1.6) que la matriz de enlace se defina positiva. También es importante remarcar que la obtención de cada subdiagrama es independiente con respecto a las $k_n^{(l)}$, es decir, para calcular las Bh-esferas de cada nivel e minimizamos los valores del proceso; de esto concluimos que podemos tomar $k_n^{(1)} = \dots = k_n^{(l-1)} = 1$ y sólo obtener el valor de $k_n^{(l)}$ para satisfacer dicha condición (1.6). En el apéndice B se pueden encontrar todos los valores encontrados para cada uno de los subdiagramas $\Delta_p(e)$. En consecuencia, obteniendo los cinco subdiagramas $\Delta_p(e)$ se pueden construir los grafos $\Gamma_p(e)$. Estos grafos codifican las variedades de grafo $M(e)$, $e \in \overline{0, 4}$ definidas positivas que son interpretadas como variedades internas correspondientes a diferentes valores del parámetro e .

3.4. Resultados de las matrices racionales de enlace.

Ahora procedemos a mostrar con detalle el cálculo para cada uno de los elementos no nulos, que conforman las diferentes matrices racionales de enlace $K^{IJ}(e)$, correspondientes a cada una de las variedades de grafo $M(e)$ presentadas en el diagrama de plumbing de la sección anterior.

Para mostrar de manera más clara los resultados utilizaremos la notación S_n , $n \in \overline{0,4}$ dada para las Bh-esferas de la secuencia primaria (3.6), así como $S_n^{(l)}$ para indicar la aplicación l veces de la k -derivada sobre S_n (recordando que los valores de las constantes $k_n^{(l)}$ varían de acuerdo al subdiagrama $\Delta_p(e)$ que se desea obtener).

Para el caso $e = 4$, la matriz de enlace corresponde con el número de Euler de la esfera $S_4 = M(4)$, es decir,

$$K^{11}(4) = \frac{-5}{19} + \frac{200933}{510510} + \frac{-3}{23} \approx 4.48 \times 10^{-9}. \quad (3.10)$$

Para $e = 3$, la variedad de grafo $M(3)$ resulta de hacer “plumbing” de las Bh-esferas $S_3 \text{---} S_4^{(1)}$ a lo largo de las fibras excepcionales a_{33} y $a_{43}^{(1)}$. Así, los elementos no cero de la matriz racional de enlace son:

$$\begin{aligned} K^{11}(3) &= \frac{4}{13} + \frac{-2}{17} + \frac{-88567869829}{466041007740} \approx 2.17 \times 10^{-6} \\ K^{22}(3) &= \frac{-5}{19} + \frac{3089929}{11741730} + \frac{-2089}{466041007740} \approx 2.22 \times 10^{-17} \\ K^{12}(3) &= -\frac{1}{466041007740} \approx -2.15 \times 10^{-12}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para $e = 2$, la variedad de grafo $M(2)$ resulta de hacer “plumbing” sobre las 3 Bh-esferas $S_2 \text{---} S_3^{(1)} \text{---} S_4^{(2)}$, a lo largo de las fibras excepcionales a_{23} y $a_{33}^{(1)}$, y de $a_{32}^{(1)}$ y $a_{43}^{(2)}$. Los elementos no cero de la matriz racional de enlace son:

$$\begin{aligned} K^{11}(2) &= \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{-1531537}{6636660} \approx 2.99 \times 10^{-3} \\ K^{22}(2) &= \frac{4}{13} + \frac{-13}{6636660} + \frac{-601177010295723703913}{1953837726068319020160} \approx 6.58 \times 10^{-10} \\ K^{33}(2) &= \frac{-5}{19} + \frac{689341120054429}{2619496256206830} + \frac{-39257}{1953837726068319020160} \approx 4.04 \times 10^{-34} \\ K^{12}(2) &= -\frac{1}{6636660} \approx -1.51 \times 10^{-7} \\ K^{23}(2) &= -\frac{1}{1953837726068319020160} \approx -5.12 \times 10^{-22}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para $e = 1$, la variedad de grafo $M(1)$ es el resultado de hacer “plumbing” sobre las

Bh-esferas $S_1 \text{---} S_2^{(1)} \text{---} S_3^{(2)} \text{---} S_4^{(3)}$. Obtenemos para la matriz racional de enlace:

$$\begin{aligned}
K^{11}(1) &= \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2311}{9245} \approx 8.33 \times 10^{-2} \\
K^{22}(1) &= \frac{1}{7} + \frac{-4}{9245} + \frac{-11988564648107}{84180573507360} \approx 9.62 \times 10^{-6} \\
K^{33}(1) &= \frac{4}{13} + \frac{-323}{84180573507360} + \frac{-15280072342108259958559713567107013122386613}{49660235112471118762743483357286701277802160} \approx 2.50 \times 10^{-21} \\
K^{44}(1) &= \frac{-5}{19} + \frac{34308803181407992475839813298929}{130373452089350371408191290535930} + \frac{-20047766957}{49660235112471118762743483357286701277802160} \approx \\
&\approx 1.63 \times 10^{-67} \\
K^{12}(1) &= -\frac{1}{9245} \approx -1.08 \times 10^{-4} \\
K^{23}(1) &= -\frac{1}{84180573507360} \approx -1.19 \times 10^{-14} \\
K^{34}(1) &= -\frac{1}{49660235112471118762743483357286701277802160} \approx -2.01 \times 10^{-44}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Por último, para $e = 0$, la variedad de grafo $M(0)$ que resulta de la pegadura de las Bh-esferas $S_0 \text{---} S_1^{(1)} \text{---} S_2^{(2)} \text{---} S_3^{(3)} \text{---} S_4^{(4)}$ tiene como elementos de su matriz racional de enlace:

$$\begin{aligned}
K^{11}(0) &= \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{31}{32} \approx 0.96875, \\
K^{22}(0) &= \frac{1}{2} + \frac{-1}{32} + \frac{-32030467}{69399345} \approx 7.21 \times 10^{-3}, \\
K^{33}(0) &= \frac{1}{7} + \frac{-13}{69399345} + \frac{-7399970787416156625299392607}{51799863435203418336200490960} \approx 1.76 \times 10^{-12}, \\
K^{44}(0) &= \frac{4}{13} + \frac{-762623}{51799863435203418336200490960} + \\
&\frac{-9864555818534855297888748326721335173456647233646233412379742243185343546551763058385313}{32059806410238279718139966062484464209573437243152889136180581555726013473961031111880160} \\
&\approx 3.68 \times 10^{-44}, \\
K^{55}(0) &= \frac{-5}{19} + \frac{84986185048470683619597440588949913929045173055232557772918123429}{322947503184188597754470274238009672930371657609883719537088869030} + \\
&\frac{-5224868486304546518657}{32059806410238279718139966062484464209573437243152889136180581555726013473961031111880160} \approx \\
&\approx 2.66 \times 10^{-134}, \\
K^{12}(0) &= -\frac{1}{32} \approx -0.03125, \\
K^{23}(0) &= -\frac{1}{69399345} \approx -1.44 \times 10^{-8}, \\
K^{34}(0) &= -\frac{1}{51799863435203418336200490960} \approx -1.93 \times 10^{-29}, \\
K^{45}(0) &= -\frac{1}{32059806410238279718139966062484464209573437243152889136180581555726013473961031111880160} \\
&\approx -3.12 \times 10^{-89}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.5. Jerarquía de las constantes de acoplamiento.

Recordemos que en el modelo BF presentado en el capítulo 2, una matriz racional de enlace K^{IJ} de una variedad de grafo M_+^3 es interpretada como una matriz que describe la jerarquía de las constantes de acoplamiento de norma, las cuales aparecen como resultado de la reducción de la variedad 7-dimensional $X^4 \times M_+^3$ a el espacio-tiempo 4-dimensional X^4 .

n	$\alpha_{\text{experimental}}$	$K^{II}(0)$	I
0	$\alpha_{\text{st}} \sim 1$	9.69×10^{-1}	1
1	$\alpha_{\text{em}} = 7.30 \times 10^{-3}$	7.21×10^{-3}	2
2	$\alpha_{\text{debil}} = 3.04 \times 10^{-12}$	1.76×10^{-12}	3
3	$\alpha_{\text{gr}} = 6.86 \times 10^{-45}$	3.68×10^{-44}	4
4	$\alpha_{\text{cosm}} = 1.48 \times 10^{-123}$	2.66×10^{-134}	5

Tabla 3.1: Constantes de acoplamiento adimensionales de baja energía *vs.* elementos de la diagonal de $K^{II}(0)$.

Reescribimos la matriz racional de enlace $K^{IJ}(0)$ (3.14) de la variedad de grafo $M(0)$ como

$$K^{IJ}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{9.69} \times \mathbf{10}^{-1} & -3.13 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ -3.13 \times 10^{-2} & \mathbf{7.21} \times \mathbf{10}^{-3} & -1.44 \times 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & -1.44 \times 10^{-8} & \mathbf{1.76} \times \mathbf{10}^{-12} & -1.93 \times 10^{-29} & 0 \\ 0 & 0 & -1.93 \times 10^{-29} & \mathbf{3.68} \times \mathbf{10}^{-44} & -3.12 \times 10^{-89} \\ 0 & 0 & 0 & -3.12 \times 10^{-89} & \mathbf{2.66} \times \mathbf{10}^{-134} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Los elementos de la diagonal de $K^{IJ}(0)$ tienen una jerarquía cercana a cada una de las constantes de acoplamiento de baja energía adimensionales (DLEC), como puede verse en el cuadro 3.1 ¹. Así, es natural suponer que los elementos de la diagonal de las otras matrices racionales de enlace $K^{IJ}(e)$, $e \in \overline{1,4}$, así como sus valores propios [48], simulan la jerarquía de las constantes de acoplamiento en el vacío de las interacciones fundamentales actuando en los estados caracterizados por densidades más altas de energía de vacío (debido a esto nos referiremos a e como parámetro de escala de energía discreta). La secuencia de estos estados corresponden a los cambios sucesivos de la estructura topológica del espacio extra dimensional $M_+^3(e)$.

Estas transformaciones topológicas de los espacios internos inducen cambios al número de campos abelianos de norma $A_I(e)$ (donde $I = 1, \dots, R(e) = \text{rank}K^{IJ}(e)$), y de sus jerarquías de constantes de acoplamiento descritas por las matrices $K^{IJ}(e)$. Por lo tanto, nuestro modelo incluye cierto esquema de “unificación” de las interacciones abelianas de tipo BF en el siguiente sentido. La matriz de enlace $K^{IJ}(1)$ tiene rango 4 y, por lo tanto, describe un esta-

¹La constante adimensional α_{st} es la constante de acoplamiento fuerte de gauge en el régimen de acoplamiento fuerte de la cromodinámica cuántica. La constante (electromagnética) de estructura fina es $\alpha_{\text{em}} = e^2/\hbar c$. La constante adimensional de interacción débil es $\alpha_{\text{debil}} = (G_F/\hbar c)(m_e c/\hbar)^2$. La constante de acoplamiento adimensional es $\alpha_{\text{gr}} = 8\pi G m_e^2/\hbar c$. La constante cosmológica adimensional es $\alpha_{\text{cosm}} = \rho_\Lambda = \rho_{\text{vacío}}/\rho_{\text{Planck}}$. Seleccionamos cinco constantes de acoplamiento (y sus combinaciones) de 31 constantes físicas adimensionales requeridas por la física de partículas y la cosmología que se indican en [3], las cuales caracterizan la aproximación de baja energía al modelo estándar extendido.

do con cuatro interacciones. Este estado puede ser asociado con la densidad de energía en el vacío que corresponde a la estructura topológica del espacio interno descrito por la variedad de grafo $M(1)$. De cualquier forma sería muy arriesgado conectar (al menos directamente) esta “unificación” con la unificación en el marco del modelo estándar extendido por gravitación, ver [3], ya que en nuestro modelo cinco interacciones de baja energía (con constantes de acoplamiento caracterizadas por $K^{IJ}(0)$) son reemplazadas por cuatro interacciones con diferente jerarquía descrita por

$$K^{IJ}(1) = \begin{pmatrix} 8.33 \times 10^{-2} & -1.08 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ -1.08 \times 10^{-4} & 9.62 \times 10^{-6} & -1.19 \times 10^{-14} & 0 \\ 0 & -1.19 \times 10^{-14} & 2.50 \times 10^{-21} & -2.01 \times 10^{-44} \\ 0 & 0 & -2.01 \times 10^{-44} & 1.63 \times 10^{-67} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Con las mismas reservas se puede relacionar la matriz

$$K^{IJ}(2) = \begin{pmatrix} 2.99 \times 10^{-3} & -1.51 \times 10^{-7} & 0 \\ -1.51 \times 10^{-7} & 6.58 \times 10^{-10} & -5.12 \times 10^{-22} \\ 0 & -5.12 \times 10^{-22} & 4.04 \times 10^{-34} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

con las teorías de gran unificación (GUT) extendida por “gravitación de alta energía”, $K^{22}(2)$, y “constante cosmológica de alta energía”, $K^{33}(2)$. La siguiente matriz

$$K^{IJ}(3) = \begin{pmatrix} 2.17 \times 10^{-6} & -2.15 \times 10^{-12} \\ -2.15 \times 10^{-12} & 2.22 \times 10^{-17} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

puede ser asociada con una super unificación incluyendo alguna versión de “gravidad de alta energía”, ya que de las cinco interacciones de baja energía ($e = 0$) sólo sobreviven dos de ellas que corresponden a las constantes de acoplamiento “gravitacional de alta energía”, $K^{11}(3)$, y “cosmológica de alta energía”, $K^{22}(3)$. En este modelo, sería natural asociar la matriz de 1×1

$$K^{IJ}(4) = (4.48 \times 10^{-9})$$

con las escalas de Planck, ya que a este nivel la única interacción se mantiene. Resulta claro que para que estas relaciones tengan sentido se tendría que introducir algunas estructuras extras (como métrica) en la variedad 7-dimensional $X^4 \times M_+^3$, y entonces construir sobre ellas las teorías de campo con grados de libertad locales. En este trabajo nos limitamos al nivel puramente topológico para obtener la jerarquía de las constantes de acoplamiento.

Capítulo 4

Ajuste fino

En este capítulo se abordará un resultado proveniente del cálculo de las matrices racionales de enlace $K^{IJ}(e)$ en el capítulo 3. La aparición en los cálculos de los elementos de la diagonal de un fenómeno numérico de eliminación casi nula que asociamos al conocido ajuste fino.

Primero procedemos a discutir el efecto de ajuste fino (fine tuning) para las constantes de acoplamiento de acuerdo a cómo se modela en nuestro esquema. El problema de la constante cosmológica sugiere fuertemente la existencia de un mecanismo de ajuste fino ya que la densidad de energía empírica del vacío cosmológico es al menos 60 órdenes de magnitud más pequeña que sus contribuciones teóricas. Notemos que en la teoría de campo cuántico algunas contribuciones a la densidad de vacío son evaluadas de la siguiente forma (ver [8, 4, 49, 50]): de la teoría estándar $(200\text{GeV})^4 \approx 10^{-67}$; de la escala de rompimiento de supersimetrías a baja energía $(10^3\text{GeV})^4 \approx 10^{-64}$; de los esquemas de gran unificación $(10^{13}\text{GeV})^4 - (10^{16}\text{GeV})^4 \approx 10^{-24} - 10^{-12}$ (dependiendo del modelo); de la gravedad cuántica $(10^{19}\text{GeV})^4 \approx 1$. La densidad del vacío se evalúa experimentalmente en [1, 2, 3] y está dada por

$$\rho_\Lambda = (1.35 \pm 0.15) \times 10^{-123},$$

cómo se mencionó en la Introducción. En nuestra referencia, un enorme efecto de ajuste fino para la constante cosmológica es modelado y es propio de las propiedades topológicas de las variedades de grafo que se consideran.

Hay que notar que en nuestro modelo la “constante cosmológica dinámica” (o sucesión de escalas de energía al vacío) está asociada con los últimos elementos diagonales $K^{RR}(e) = K^{5-e;5-e}(e)$ de las matrices racionales de enlace de las variedades de grafo $\{M_{\pm}^3(e) | e \in \overline{0, 4}\}$ y conlleva un cambio cuando la topología del espacio extra-dimensional se transforma. Así, la constante cosmológica, entendida como densidad de energía de vacío, depende del parámetro discreto de energía e . Escribimos ahora los elementos $K^{5-e;5-e}(e)$ de forma que se demuestre

el ajuste fino de la constante cosmológica correspondiente a los diferentes niveles marcados por el parámetro de energía e .

Si revisamos detenidamente el cálculo para la obtención de $K^{55}(0)$ en (3.14) podemos ver que se realiza como

$$K^{55}(0) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i(0)}{a_i(0)}, \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{b_1(0)}{a_1(0)} &= \frac{-5}{19}, \\ \frac{b_2(0)}{a_2(0)} &= \frac{84986185048470683619597440588949913929045173055232557772918123429}{322947503184188597754470274238009672930371657609883719537088869030}, \\ \frac{b_3(0)}{a_3(0)} &= \frac{-5224868486304546518657}{32059806410238279718139966062484464209573437243152889136180581555726013473961031111880160}. \end{aligned}$$

El ajuste fino se puede ver claramente de la siguiente forma. Los dos primeros términos tienen orden 10^{-1} :

$$\begin{aligned} \frac{b_1(0)}{a_1(0)} &= \\ &-0.2631578947368421052631578947368421052631578947368421052631578947368\dots, \\ \frac{b_2(0)}{a_2(0)} &= \\ &0.2631578947368421052631578947368421052631578947368421052631578947370\dots, \end{aligned}$$

y su suma es

$$1.62972552592706484304708535624113247371767504764258954787148014487270\dots \times 10^{-67}.$$

El tercer término es

$$-1.62972552592706484304708535624113247371767504764258954787148014487243\dots \times 10^{-67},$$

con lo que el resultado final de la suma es

$$K^{55}(0) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i(0)}{a_i(0)} = 2.656005289\dots \times 10^{-134}. \quad (4.2)$$

El ajuste fino para la constante cosmológica es impresionante, tenemos dos términos de orden 10^{-1} y uno de orden 10^{-67} que se cancelan mutuamente con una precisión de 10^{-134} .

El mismo proceso puede identificarse para cada uno de los elementos finales de la diagonal

de las matrices $K^{IJ}(e)$, en el caso de

$$K^{44}(1) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i(1)}{a_i(1)}, \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{b_1(1)}{a_1(1)} &= \frac{-5}{19}, \\ \frac{b_2(1)}{a_2(1)} &= \frac{34308803181407992475839813298929}{130373452089350371408191290535930}, \\ \frac{b_3(1)}{a_3(1)} &= \frac{-20047766957}{49660235112471118762743483357286701277802160}. \end{aligned}$$

El ajuste fino se muestra de la misma manera que en el caso anterior. Los dos primeros términos tienen orden 10^{-1} :

$$\begin{aligned} \frac{b_1(1)}{a_1(1)} &= -0.263157894736842105263157894736842105263\dots, \\ \frac{b_2(0)}{a_2(0)} &= 0.263157894736842105263157894736842105263\dots, \end{aligned}$$

y su suma

$$4.036985912691626972166717050186083299\dots \times 10^{-34}.$$

El tercer término de la suma es

$$-4.036985912691626972166717050186081669\dots \times 10^{-34},$$

que al sumarse de nuevo muestra un gran ajuste:

$$K^{44}(1) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i(1)}{a_i(1)} = 1.629725526983\dots \times 10^{-67}. \quad (4.4)$$

Podemos observar que este valor y el valor absoluto del sumando

$$\frac{b_3(0)}{a_3(0)} = -1.629725525927\dots \times 10^{-67} \quad (4.5)$$

en el cálculo de la constante $K^{55}(0)$ coinciden hasta el octavo orden, lo cual resulta sorprendente especialmente si consideramos sus representaciones en forma de fracción:

$$\begin{aligned} K^{44}(1) &= \frac{26869}{164868252691154276926871239187866021757572803005236098566405242449679440}, \\ \frac{b_3(0)}{a_3(0)} &= \frac{-5224868486304546518657}{32059806410238279718139966062484464209573437243152889136180581555726013473961031111880160}. \end{aligned}$$

Para el caso $e = 2$ tenemos

$$K^{33}(2) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i(2)}{a_i(2)}, \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{b_1(2)}{a_1(2)} &= \frac{-5}{19} = -0.\overline{263157894736842105}, \\ \frac{b_2(2)}{a_2(2)} &= \frac{689341120054429}{2619496256206830} = 0.2631578947368421\ 25355\dots, \\ \frac{b_3(2)}{a_3(2)} &= \frac{-39257}{1953837726068319020160} = -2.0092252020845316\ 11154\dots \times 10^{-17}. \end{aligned}$$

La suma de los dos primeros términos es

$$\frac{b_1(2)}{a_1(2)} + \frac{b_2(2)}{a_2(2)} = \frac{1}{49770428867929770} = 2.0092252020845316\ 51537 \times 10^{-17}.$$

donde de nuevo vemos el ajuste fino con el tercer sumando, para obtener

$$K^{33}(2) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i(2)}{a_i(2)} = 4.0383227651\dots \times 10^{-34}.$$

Véase que de nuevo, el valor de $K^{33}(2)$ coincide (aunque sólo hasta segundo orden) con la tercera contribución de $K^{44}(1)$, $\frac{b_3(1)}{a_3(1)} = -4.0369859126\dots \times 10^{-34}$.

Para $e = 3$, el efecto continúa,

$$K^{22}(3) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i(3)}{a_i(3)},$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{b_1(3)}{a_1(3)} &= \frac{-5}{19} = -0.\overline{263157894736842105}, \\ \frac{b_2(3)}{a_2(3)} &= \frac{3089929}{11741730} = 0.263\ 157\ 899\ 219\ 280\ 293\ 449\dots, \\ \frac{b_3(3)}{a_3(3)} &= \frac{-2089}{466041007740} = -4.482\ 438\ 165\ 968\ 077\ 047\ 742\dots \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

La suma de los dos primeros términos es

$$\frac{b_1(3)}{a_1(3)} + \frac{b_2(3)}{a_2(3)} = \frac{1}{223\ 092\ 870} = 4.482\ 438\ 188\ 185\ 933\ 508\ 318\dots \times 10^{-9},$$

donde de nuevo vemos el ajuste fino con el tercer sumando, para obtener

$$K^{22}(3) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i(3)}{a_i(3)} = 2.221\ 785\ 646\ 057\ 599\ 524\ 367 \times 10^{-17}.$$

Véase que de nuevo, el valor de $K^{22}(3)$ coincide (aunque sólo hasta primer orden) con la tercera contribución de $K^{33}(2)$.

Por último, en el caso de $e = 4$,

$$K^{11}(4) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i(4)}{a_i(4)},$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{b_1(4)}{a_1(4)} &= \frac{-5}{19} = -0.\overline{263157894736842105}, \\ \frac{b_2(4)}{a_2(4)} &= \frac{200933}{510510} = 0.393\,592\,681\,827\,975\,945\,623\,004\dots, \\ \frac{b_3(4)}{a_3(4)} &= \frac{-3}{23} = -0.130\,434\,782\,608\,695\,652\,173\,913\dots \end{aligned}$$

La suma de los dos primeros términos es

$$\frac{b_1(3)}{a_1(3)} + \frac{b_2(3)}{a_2(3)} = \frac{1265177}{9699690} = 0.130\,434\,787\,091\,133\,840\,359\,846\dots,$$

y aunque el efecto ya no es tan impresionante, se sigue dando la cancelación de orden al sumar la tercer fracción, obteniendo

$$K^{11}(4) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i(4)}{a_i(4)} = 4.482\,438\,188\,185\,933\,508\dots \times 10^{-9}, \quad (4.7)$$

en este último caso, la coincidencia entre $K^{11}(4)$ y la tercera contribución de $K^{22}(3)$ es hasta el octavo orden de nuevo.

Podemos ver que cada constante “cosmológica” tiene la misma contribución $-\frac{5}{19}$, cuyo valor absoluto es de orden 10^{-1} , y otro término del mismo orden pero positivo que lo compensa con gran precisión. El resultado de esta compensación de los dos primeros términos presenta el mismo orden del tercer término, y lo compensa con exactitud sorprendente, para permitir una eliminación casi nula que reduce el orden del resultado a la mitad. El proceso sólo presenta un efecto de menor refinamiento en la fórmula (4.7) que muestra un ajuste fino más débil. Otra cuestión que es importante hacer notar es que cada constante de acoplamiento $K^{5-e,5-e}(e)$ para $e \in \overline{1,4}$, tiene el mismo orden del tercer término de la expresión para $e-1$.

Por último, hay que remarcar que el proceso se forma con 3 fracciones debido al uso de Bh-esferas para la construcción de las variedades de grafo. Estas Bh-esferas son el caso más simple para las esferas homológicas fibradas de Seifert (Sfh-esferas) que pueden, en general, tener un número arbitrario finito de órbitas excepcionales (ver apéndice A), por lo que el uso de Sfh-esferas en general llevaría al mismo tipo de fórmulas pero con un número arbitrario (pero finito) de términos.

Capítulo 5

Cálculo del rango de Q

En este capítulo se abordará el problema de cómo obtener la matriz Q relacionada al grafo Γ_p a partir de K^{IJ} . Para lograr esto último, es necesario desarrollar en forma de fracción continua los elementos de la matriz de enlace K de la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$. Debido a la magnitud de orden de los valores de los últimos elementos de K , el cálculo de la forma tradicional se vuelve imposible con los tiempos de cálculo computacional actuales, por lo que fue necesario desarrollar un nuevo algoritmo de obtención del desarrollo de fracciones continuas que reduce enormemente el número de cálculos implicados en el proceso contra el algoritmo tradicional.

5.1. Rango de la matriz Q .

En el capítulo 1 demostramos que la matriz Q_{red} (1.4), obtenida mediante la aplicación de la diagonalización parcial de Gauss-Neumann a la matriz Laplaciana Q del grafo Γ_p , coincidía con la matriz racional de enlace K (1.18) de la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$. Ahora ilustraremos como obtener la matriz Q a partir de la matriz K , que fue calculada en el capítulo 3 para diferentes variedades de grafo $M(e)$. La idea básica es descomponer las fracciones continuas (1.3) que aparecen en cada submatriz B_{red} (1.2), para obtener los números de Euler para cada vértice del grafo Γ_p y, con ello, obtener el rango de la matriz Q . Dicha descomposición es simple y se puede obtener mediante un algoritmo sencillo de programar [31].

Como ejemplo ilustrativo tomemos la fracción $\frac{b_1(0)}{a_1(0)} = \frac{-5}{19}$ que se encuentra en la suma del primer elemento diagonal de la matriz $K(0)$ (3.14). De acuerdo con lo establecido en el capítulo 1, $\frac{a^I}{b^I} = -[\epsilon_1^I, \dots, \epsilon_{m_I}^I]$ así que debemos descomponer $-\frac{a_1(0)}{b_1(0)} = \frac{19}{5}$ como fracción continua obteniendo $\frac{19}{5} = 4 - \frac{1}{5} = [4, 5]$ lo cual nos indica la existencia de una cadena terminal de dos vértices en Γ_p . La mayor parte de las fracciones $\frac{a}{b}$, para cadenas terminales, y $\frac{p}{q}$, para cadenas internas, se descomponen fácilmente en fracciones continuas para obtener el número de

vértices en cada cadena. En el apéndice C se pueden ver los detalles de cada una de ellas. Sin embargo, al llegar a las cadenas que conforman el grafo Γ_p , para las Bh-esferas generadas con los primos mayores en la secuencia primaria, la longitud de estas fracciones continuas aumenta enormemente. Para ilustrar esto podemos tomar el caso de $\frac{b_3(3)}{a_3(3)} = \frac{-2089}{466041007740}$ en el que obtenemos $\frac{466\,041\,007\,740}{2089} = [223092872, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 6]$, que implica que dicha cadena contiene 17 vértices. El caso más excepcional dentro de nuestros cálculos se da para el elemento $\frac{b_3(0)}{a_3(0)} = \frac{-5224868486304546518657}{3205980641023827971813996606248446420957343724315288913618058155572601347396103111880160}$, en el que la descomposición, mediante el algoritmo tradicional de residuos para obtener fracciones continuas, es inutilizable debido a que la longitud de dicha fracción continua resulta $401912960484965116823 \approx 4.02 \times 10^{20}$. Lo anterior llevó a desarrollar un algoritmo alternativo para la obtención de la longitud de dichas fracciones continuas, el cuál se presenta a continuación.

5.2. Demostración del algoritmo para la obtención de fracciones continuas.

Sea $\frac{p}{q}$ una fracción con $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$. Tomemos $n_1 = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$ y $r_1 = p \bmod q$ (es decir, el cociente y residuo de dividir p entre q), entonces

$$\frac{p}{q} = \frac{n_1 q + r_1}{q} = n_1 + 1 - \frac{q - r_1}{q} = n_1 + 1 - \frac{1}{\frac{q}{q-r_1}}, \quad (5.1)$$

donde podemos notar que el 1 adicionado a n_1 aparece debido a nuestra definición de fracción continua mediante subtracciones. Ahora analizamos el denominador de la última fracción $\frac{q}{q-r_1}$, en la que $q > q - r_1$. De nuevo tomamos n_2, r_2 como cociente y residuo de dividir q entre $q - r_1$ y obtenemos

$$\frac{q}{q-r_1} = \frac{(q-r_1)n_2 + r_2}{q-r_1} = n_2 + 1 - \frac{q-r_1-r_2}{q-r_1} = n_2 + 1 - \frac{1}{\frac{q-r_1}{q-r_1-r_2}},$$

y así sucesivamente, por lo que notamos que la descomposición continúa y el denominador de la última fracción después de repetir m veces el proceso será

$$\frac{q - r_1 - \dots - r_{m-1}}{q - r_1 - \dots - r_{m-1} - r_m}, \quad (5.2)$$

por lo que el punto fundamental será cuántas veces debe repetirse el proceso para que la fracción continua sea determinada, lo que pasa cuando $q - r_1 - r_2 - \dots - r_m = 1$, en cuyo caso la longitud de la fracción sería $m + 1$.

Por otro lado, analicemos la fracción $\frac{x}{x-r}$ con $x > 2r$, en este caso el cociente es 1 y un cálculo directo muestra que

$$\frac{x}{x-r} = 2 - \frac{x-2r}{x-r} = 2 - \frac{1}{\frac{x-r}{x-r-r}} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{x-r-r}{x-r-r-r}}}, \quad (5.3)$$

donde observamos que la diferencia entre numerador y denominador se mantiene constante, por lo que podemos repetir el proceso k veces hasta obtener la fracción $\frac{x-kr}{x-(k+1)r}$ donde $x - (k+1)r < r$ que significa que el cociente ya no será igual a 1 y debemos reiniciar el proceso hasta que de nuevo obtengamos un cociente igual a 1. Debido a que durante el proceso los valores van decreciendo debemos llegar a $r = 1$ o $x = 1$. En el caso $r = 1$, obtendríamos una fracción de la forma $\frac{x}{x-1}$ que se descompone como

$$\frac{x}{x-1} = 2 - \frac{1}{\frac{x-1}{x-1-1}},$$

en donde podemos observar que después de $x-2$ descomposiciones el denominador resultante sería de la forma $\frac{2}{1} = 2$ y la fracción continua estaría calculada en su totalidad. Por otro lado, si $x = 1$ la fracción tiene numerador 1 y el proceso también está terminado. En este punto, podemos observar que la fracción (5.1) se puede reescribir como

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{p - (p - q)},$$

y cumple la descomposición en (5.3) si $p < 2q$, así que podemos resumir en este caso el proceso de descomposición obteniendo el menor número k que haga que $k > \frac{q}{p-q} - 1$, que podemos reescribir como $k = \left\lfloor \frac{q}{p-q} \right\rfloor$. Revisando este resultado, podemos inferir que para fracciones en las que $p > 2q$ (hay que notar que $p = 2q$ implicaría que la fracción es de hecho un número entero), el proceso lleva a realizar la descomposición hasta obtener la condición $p < 2q$ y entonces encontrar k que representa el número de descomposición con cociente 1. Pero podemos resumir aún más el algoritmo si notamos que la fracción $\bar{k} = \left\lfloor \frac{q}{p \bmod q} \right\rfloor$ incluye el valor de k junto con el número de cocientes diferentes a 1 obtenidos en la descomposición previa a obtener un cociente igual a 1. Esto se debe a que $p \bmod q$ representa el valor de r en (5.3) y por tanto \bar{k} nos indica el número de veces que debemos repetir la descomposición hasta que no se cumpla la condición $x > 2r$.

Es importante indicar que mediante este procedimiento, no sólo obtenemos de manera directa la longitud de la fracción continua, sino que podemos obtener dicha fracción si realizamos la descomposición manual y, cada vez que encontremos un cociente igual a 1, tomamos el valor de \bar{k} para calcular la cantidad de cocientes 1 que aparecerán hasta que la condición

no se cumpla y obtengamos un cociente diferente de 1. Es decir, $s_i = \left\lfloor \frac{p_i}{q_i} \right\rfloor + 1$ nos entrega el cociente necesario para continuar descomponiendo la fracción continua y $k_i = \left\lfloor \frac{q_i}{r_i} \right\rfloor$ nos dice cuántos términos de la descomposición pasarán hasta obtener de nuevo $s_i > 2$.

Sea la fracción original $\frac{p_1}{q_1}$, con $p_1 > q_1$, hacemos $i = 0$
 Repetir
 Aumentar i en uno
 Hacer $r_i = p_i \bmod q_i$, $s_i = \left\lfloor \frac{p_i}{q_i} \right\rfloor + 1$, $k_i = \left\lfloor \frac{q_i}{r_i} \right\rfloor$, $q_{i+1} = q_i \bmod r_i$ y $p_{i+1} = q_{i+1} + r_i$
 Hasta que $r_i = 1$ ó $q_{i+1} = 1$
 Si $r_i = 1$ entonces $L = \sum_{j=1}^i k_j$.
 Si $q_{i+1} = 1$ entonces $L = 1 + \sum_{j=1}^i k_j$.

Algoritmo 5.1: Fracciones continuas

Finalmente, podemos resumir el algoritmo como se muestra en el recuadro. En dicho algoritmo, L representa la longitud de la fracción continua que representa a $\frac{p_1}{q_1}$, que se forma por cada valor s_i y una cadena de $k_i - 1$ términos igual a 2. En el caso de $q_{i+1} = 1$ se añade a la fracción como último término p_{i+1} .

5.3. Ejemplos de aplicación del algoritmo.

Un ejemplo de cálculo para el primer caso del algoritmo anterior es la fracción $\frac{2339}{110}$, donde $p_1 = 2339$ y $q_1 = 110$.

Hacemos

$$\begin{aligned} r_1 &= 2339 \bmod 110 = 29, \\ s_1 &= \left\lfloor \frac{2339}{110} \right\rfloor + 1 = 22, \\ k_1 &= \left\lfloor \frac{110}{29} \right\rfloor = 3, \\ q_2 &= 110 \bmod 29 = 23, \\ p_2 &= 23 + 29 = 52. \end{aligned}$$

Como $r_1 \neq 1$ y $q_2 \neq 1$, repetimos el proceso, así que hacemos

$$\begin{aligned} r_2 &= 52 \bmod 23 = 6, \\ s_2 &= \left\lfloor \frac{52}{23} \right\rfloor + 1 = 3, \\ k_2 &= \left\lfloor \frac{23}{6} \right\rfloor = 3, \\ q_3 &= 23 \bmod 6 = 5, \\ p_3 &= 5 + 6 = 11. \end{aligned}$$

De nuevo repetimos con

$$\begin{aligned} r_3 &= 11 \bmod 5 = 1, \\ s_3 &= \left\lfloor \frac{11}{5} \right\rfloor + 1 = 3, \\ k_3 &= \left\lfloor \frac{5}{1} \right\rfloor = 5, \end{aligned}$$

donde paramos ya que $r_3 = 1$. Por lo tanto, $L = \sum_{j=1}^3 k_j = k_1 + k_2 + k_3 = 3 + 3 + 5 = 11$. Este resultado se puede verificar directamente al encontrar

$$\frac{2339}{110} = [22, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2] = 22 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}}}}}}}.$$

Para el segundo caso del algoritmo podemos tomar la fracción $\frac{210785}{167}$, donde $p_1 = 210785$ y $q_1 = 167$.

Hacemos

$$\begin{aligned} r_1 &= 210785 \bmod 167 = 31, \\ s_1 &= \left\lfloor \frac{210785}{167} \right\rfloor + 1 = 1263, \\ k_1 &= \left\lfloor \frac{167}{31} \right\rfloor = 5, \\ q_2 &= 167 \bmod 31 = 12, \\ p_2 &= 31 + 12 = 43. \end{aligned}$$

Repetimos ahora con

$$\begin{aligned} r_2 &= 43 \bmod 12 = 7, \\ s_2 &= \left\lfloor \frac{43}{12} \right\rfloor + 1 = 4, \\ k_2 &= \left\lfloor \frac{12}{7} \right\rfloor = 1, \\ q_3 &= 12 \bmod 7 = 5, \\ p_3 &= 7 + 5 = 12. \end{aligned}$$

Repetimos de nuevo, pero ahora con

$$\begin{aligned} r_3 &= 12 \bmod 5 = 2, \\ s_3 &= \left\lfloor \frac{12}{5} \right\rfloor + 1 = 3, \\ k_3 &= \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2, \\ q_4 &= 5 \bmod 2 = 1, \\ p_4 &= 1 + 2 = 3, \end{aligned}$$

donde paramos ya que $q_4 = 1$. Finalmente calculamos $L = 1 + \sum_{j=1}^3 k_j = 1 + k_1 + k_2 + k_3 = 1 + 5 + 1 + 2 = 9$. De nuevo, podemos verificar esto con

$$\frac{210785}{167} = [1263, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 2, 3] = 1263 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{4 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3}}}}}}}}}$$

5.4. Uso del algoritmo para calcular el rango de la matriz Q .

Ahora podemos usar el algoritmo para encontrar la longitud de las fracciones continuas de los elementos diagonales de la matriz racional de enlace K de la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$. En especial el caso $K(0)$ en el que la longitud de dichas fracciones exigen el uso de dicho algoritmo. Ilustraremos aquí el cálculo para la fracción continua de mayor longitud $-\frac{a_3(0)}{b_3(0)}$, el resto de los resultados los escribimos en el apéndice C.

Tomemos entonces $p_1 = 32\ 059\ 806\ 410\ 238\ 279\ 718\ 139\ 966\ 062\ 484\ 464\ 209\ 573\ 437\ 243\ 152\dots$
 $\dots 889136\ 180\ 581\ 555\ 726\ 013\ 473\ 961\ 031\ 111\ 880\ 160$ y $q_1 = 5224868486304546518657$ (en don-

de respetamos la notación general del algoritmo q aún cuando este valor representa q^*).
Calculamos

$$\begin{aligned} r_1 &= p_1 \bmod q_1 = 13, \\ k_1 &= \left\lfloor \frac{q_1}{r_1} \right\rfloor = 401912960484965116819, \\ q_2 &= q_1 \bmod r_1 = 10, \\ p_2 &= q_2 + r_1 = 23, \end{aligned}$$

y como $r_1 \neq 1, q_2 \neq 1$, calculamos

$$\begin{aligned} r_2 &= p_2 \bmod q_2 = 3, \\ k_2 &= \left\lfloor \frac{q_2}{r_2} \right\rfloor = 3, \\ q_3 &= q_2 \bmod r_2 = 1, \end{aligned}$$

donde dejamos de iterar, ya que $q_3 = 1$. Así que la longitud de la fracción continua que representa a $-\frac{a_3(0)}{b_3(0)}$ es

$$L = 1 + \sum_{j=1}^2 k_j = 1 + 401912960484965116819 + 3 = 401\,912\,960\,484\,965\,116\,823.$$

De hecho no es complicado encontrar que la fracción $-\frac{a_3(0)}{b_3(0)}$ puede ser escrita como

$$[6136002560499583357334935210522183785677061494587790671204688511572, 2, \dots, 2, 3, 2, 2, 4]$$

donde los puntos suspensivos representan 401912960484965116818 números 2 de igual número de fracciones cuyo cociente es 1. Este resultado ilustra claramente que el cálculo de estas fracciones continuas, mediante el clásico método de los residuos, resulta imposible para la mayoría de las computadoras actuales. Para ilustrar esto, la computadora más rápida del mundo al momento de escribir este trabajo, la Tianhe-2, tiene un rendimiento probado de 33.89×10^{15} FLOPS (operaciones de punto flotante por segundo), por lo que le tomaría un estimado de 10^4 segundos (≈ 3 horas) obtener la descomposición anterior. De hecho, sólo las 4 computadoras más rápidas del mundo podrían hacerlo en menos de 24 horas¹.

Usando los resultados obtenidos para todos los elementos de la matriz racional K_{55} podemos concluir que la matriz Q correspondiente al grafo Γ_p tiene un rango (y por ende, número

¹“TOP #1 SYSTEMS” en *Organización Top500* (sitio web), consultada 29 de abril de 2015, <http://www.top500.org/featured/top-systems/>

de vértices) igual a $401912960484965225793 \approx 4.02 \times 10^{20}$. El resultado anterior muestra que el grafo Γ_p que sirve como base para la variedad $M(\Gamma_p)$ se compone de un número enorme (del orden 10^{20}) de vértices. Toda esta información se encuentra comprimida en la matriz racional K , que en nuestro modelo integra la información sobre la jerarquía sobre las cinco interacciones fundamentales. Así que para describir dicha jerarquía es necesario iniciar con un enorme grafo como Γ_p que codifica el espacio de grafo $M(\Gamma_p)$ en la aproximación mediante un modelo 7-dimensional de Kaluza-Klein.

Conclusiones

El presente trabajo muestra un acercamiento a la representación del problema de jerarquía de las constantes de acoplamiento mediante un modelo puramente topológico. Es importante resaltar que las piezas fundamentales de dicho modelo son las esferas de Brieskorn, pero en primera instancia son los números primos que se toman para generarlas. En ese sentido, podemos decir que el modelo se crea a partir de una secuencia primaria de números primos y, a partir de ellos, se obtienen todos los resultados mostrados en este trabajo.

Debido a que se pudo demostrar que en este modelo topológico de tipo BF, bajo el procedimiento de Kaluza-Klein, la matriz racional de enlace K de la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$ queda en el lugar donde usualmente se encuentra la matriz de constantes de acoplamiento, podemos concluir que tenemos un modelo congruente para obtener resultados específicos acerca del problema de jerarquía planteado. De esta forma, podemos concluir que el modelo (que inicialmente se genera bajo un espacio de grafo visto como un complejo simplicial) puede ligarse con el problema que se quiere resolver y, obtener resultados mediante cálculos bien conocidos de grafos y de variedades de grafos. Además, se mostró que la información contenida en la matriz Laplaciana Q del grafo Γ_p , sobre el que se forma el espacio de grafo $M(\Gamma_p)$, es de hecho la misma que la contenida en la matriz racional de enlace K de la variedad 3-dimensional $M(\Gamma_p)$, y no sólo eso, sino que ambas se conectan mediante una relación sencilla, como lo son las fracciones continuas y la diagonalización parcial de Gauss-Neumann.

Es importante hacer notar que la matriz Q es entera y se forma de unos cuantos números enteros distintos (cómo se mostró en el apéndice C), repetidos una gran cantidad de veces. De hecho, debido a esta cantidad, es que fue necesario desarrollar un algoritmo novedoso para calcular de manera compacta el desarrollo en fracciones continuas, para poder demostrar (capítulo 5) que el rango de Q es 401912960484965225793. Por todo esto, podemos concluir que estos pocos enteros (colocados específicamente como indica la matriz Q), contienen toda la información detallada de la jerarquía de valores obtenida en K . Es importante considerar que el desarrollo de este algoritmo (sección 5.2), es en si mismo un resultado de valor de esta investigación, aunque se obtuvo de manera colateral bajo la necesidad de obtener de manera analítica algo que resultó imposible de calcular computacionalmente.

Por otro lado, abrimos la hipótesis del fenómeno de ajuste fino (capítulo 4), que proponemos se presenta al obtener los elementos de la matriz de enlace K . Hay que hacer notar que este fenómeno es subyacente al modelo presentado y no depende del ejemplo presentado en particular, por lo que podemos decir que es una propiedad de los invariantes topológicos, y no del espacio de grafo en particular. También se hace notar la relación tan peculiar entre los órdenes de los diferentes elementos que forman la matriz de enlace K .

En otro orden de ideas, es justo observar que el ejemplo de espacios de grafo presentado en el capítulo 3 es sólo una muestra de lo que se podría generar con el modelo general presentado en el capítulo 1. Pero esto de ninguna manera implica que dicho ejemplo fuera arbitrario, ya que el diagrama de la figura 3.1 se formó con una secuencia primaria (3.1) de Bh-esferas (basada en los primeros números primos como se mencionó arriba), junto con reglas claras para la generación de cada esfera, y de la forma en la que se pegan para generar las variedades de grafo y, por consecuencia, sus invariantes topológicos. De cualquier forma, se pueden realizar algunas modificaciones para generar dicho diagrama que podrían diversificar los resultados a obtener, y que podrían ser campo de estudio de investigaciones posteriores. Una de ellas sería modificar la secuencia primaria de Bh-esferas, en particular el uso de la esfera S_0 (3.6) que es un caso especial y hace pensar que se pierde generalización con las demás esferas homológicas. Otra modificación sería calcular la k -derivada de las esferas de forma que cada uno de los subdiagramas previos a cada $\Delta_p(e)$ tengan matrices definidas positivas. Este cambio no es trivial, ya que provocaría la necesidad de hacer modificaciones en la teoría BF para hacer congruente la relación entre la matriz K de la acción S_{BF} (2.16) propuesta y la obtenida a partir del diagrama.

Por último, hay que resaltar que este trabajo representa un eslabón en una cadena de resultados acerca de la representación topológica de estos problemas (jerarquía de las constantes de acoplamiento y ajuste fino) y, por lo tanto, aunque presenta resultados concisos, también nos abre hipótesis para continuar la investigación en el tema.

Apéndice A

Esferas homológicas

En este apartado se presentan las definiciones de los espacios topológicos usados para formar la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$.

A.1. Esferas homológicas fibradas de Seifert.

Una variedad n -dimensional X es un espacio topológico de Hausdorff tal que cada punto en el tiene una vecindad homeomorfa a un disco n -dimensional abierto. Sea

$$F = S^2 \setminus \text{int} (D_1^2 \cup \dots \cup D_n^2),$$

una esfera 2 dimensional con n discos abiertos disjuntos removidos. El producto $F \times S^1$ es una 3-variedad orientada compacta cuya frontera consiste de n toros $(\partial D_i^2) \times S^1$, $i = 1, \dots, n$.

El grupo fundamental de $F \times S^1$ es

$$\langle x_1, \dots, x_n, h \mid hx_i = x_ih, x_1 \dots x_n = 1 \rangle, \quad (\text{A.1})$$

donde los generadores x_i son representados por las curvas ∂D_i^2 orientadas como las curvas frontera de F .

Podemos ver que en este grupo fundamental $x_i \equiv q_i$, donde q_i es una clase de homotopía de la curva $Q_i = \partial D_i^2$, y que h es una clase de homotopía de una orbita regular H_i . Q_i y H_i serán definidas más adelante en la descripción topológica de la Esfera homológica fibrada de Seifert (Sfh-esfera).

Supongamos que (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, n$ son primos relativos, con $a_i \geq 2$. Identificamos el meridiano del i -ésimo toro sólido con la curva sobre $(\partial D_i^2) \times S^1$, la cual es isotópica a la curva $a_i x_i + b_i h$. La imagen de la curva $\{0\} \times S^1 \subset D_i^2 \times S^1$ es llamada fibra singular. La variedad

obtenida mediante esta construcción es llamada Variedad de Seifert con n fibras singulares [51].

Al grupo fundamental de la variedad de Seifert M le llamamos

$$\langle \pi_1(M) = x_1, \dots, x_n, h \mid hx_i = x_ih, x_i^{a_i}h^{b_i} = x_i \dots x_n = 1 \rangle, \quad (\text{A.2})$$

ya que la curva $a_i x_i + b_i h$ es isotópica al meridiano del i -ésimo toro sólido el cual, a su vez, es isotópico a un punto.

Ahora, sean a_1, \dots, a_n enteros relativos primos entre sí, para todo $a_i \geq 2$ con $n \geq 3$. En este caso existe una única variedad 3-dimensional fibrada de Seifert tal que los invariantes de Seifert tienen la siguiente forma:

1. (a_i, b_i) son primos relativos,
2. $\sum_{i=1}^n b_i a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n = 1$, donde \hat{a}_i significa la ausencia de a_i .

A lo descrito anteriormente denominamos esfera homológica fibrada de Seifert (Sfh-esfera) de n fibras excepcionales [52] y escribimos como:

$$\sum (a_1, \dots, a_n). \quad (\text{A.3})$$

Sea $F_0 = S^2 \setminus \text{int}(D_1^2 \cup \dots \cup D_n^2)$ una esfera 2 dimensional con el interior de n discos disjuntos removidos.

La esfera homológica $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$ puede ser construida como una 3-variedad cerrada orientada en la cual se puede efectuar la inmersión de n toros sólidos disjuntos

$$(D^2 \times S^1)_1, \dots, (D^2 \times S^1)_n$$

de tal forma que:

- a.** Si $\sum_0 = \sum \setminus \text{Int}((D^2 \times S^1)_1 \cup \dots \cup (D^2 \times S^1)_n)$ entonces existe la fibrición

$$\pi : \sum_0 \rightarrow F_0, \quad (\text{A.4})$$

$\sum_0 = F_0 \times S^1$ es trivial, es decir es una 3-variedad orientada compacta cuya frontera consiste de n toros $(\partial D_i^2) \times S^1$, $i = 1, \dots, n$.

- b.** Si $R \subset \sum_0$ es una sección de la fibrición π , y definimos 2 curvas cerradas simples :

$$\begin{aligned} Q_i &= -\partial R \cap (D^2 \times S^1)_i \\ H_i &= \text{fibra regular de la fibrición } \pi \text{ sobre } \partial (D^2 \times S^1)_i \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

entonces la inmersión está definida por la identificación de la curva $a_i Q_i + b_i H_i$ con el meridiano M_i del toro sólido $(D^2 \times S^1)_i$, donde b_i ($i = 1, \dots, n$) satisface:

$$\sum_{i=1}^n b_i a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n = 1. \quad (\text{A.6})$$

A.2. Esfera homológica de Brieskorn.

Las esferas homológicas de Brieskorn (Bh-esferas) pertenecen a la clase de las esferas homológicas fibradas de Seifert (Sfh-esferas) [33], y son el elemento básico de la estructura de la variedad de grafo tipo “plumbing” (figura 1.4) [36]. Sean a_1, a_2, a_3 números positivos primos relativos entre ellos. La esfera homológica de Brieskorn (Bh-esfera) $\Sigma(\underline{a}) := \Sigma(a_1, a_2, a_3)$ se define como el enlace de la singularidad de Brieskorn

$$\Sigma(\underline{a}) := \Sigma(a_1, a_2, a_3) := \{z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + z_3^{a_3} = 0\} \cap S^5. \quad (\text{A.7})$$

Si algún a_i es igual a 1, la variedad $\Sigma(\underline{a})$ es homeomorfa a la esfera ordinaria S^3 .

En estas variedades, existe una única fibración de Seifert con invariantes no-normalizados (a_i, b_i) sujetos a $e(\Sigma(\underline{a})) = \sum_{i=1}^3 b_i/a_i = -1/a$, donde $a = a_1 a_2 a_3$ y $e(\Sigma(\underline{a}))$ es su número de Euler racional, un invariante topológico bien conocido para una Bh-esfera. Hay que hacer notar que la superficie $z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + z_3^{a_3} = 0$ tiene la orientación canónica que induce la orientación canónica del enlace $\Sigma(\underline{a})$. Debido a que el número de Euler de la Bh-esfera (vista como variedad de grafo) juega el papel de la matriz de enlace racional de 1×1 . La orientación canónica de $\Sigma(\underline{a})$ corresponde a la matriz definida negativa $-1/a$. Como consecuencia, y ya que usaremos matrices definidas positivas en el desarrollo, será necesario cambiar la orientación de las Bh-esferas: $\Sigma_+(\underline{a}) = -\Sigma(\underline{a})$; así que

$$e(\Sigma_+(\underline{a})) = -\sum_{i=1}^3 b_i/a_i = 1/a. \quad (\text{A.8})$$

Los únicos puntos de $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ que tienen un grupo de isotropía no trivial \mathbb{Z}_{a_i} son aquellos con una coordenada z_i igual a cero ($i = 1, 2, 3$). La fibra a través de un punto así es llamada una fibra excepcional (singular) de grado a_i . Todas las demás fibras se llaman regulares (no singulares). En general, las Sfh-esferas $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$ tienen n fibras excepcionales diferentes con estabilizador \mathbb{Z}_{a_k} (los enteros a_k , $k = 1, \dots, n$ son primos relativos por pares) y representan casos especiales de las esferas \mathbb{Z} -homológicas [33].

A.3. Espacio de lentes.

Ahora definamos el concepto de un espacio de lentes. Sea M una variedad obtenida pegando dos toros sólidos por un homeomorfismo de orientación inversa $f : T^2 \rightarrow T^2$ de sus fronteras. En las bases meridiano-longitud de los dos toros, (μ_1, λ_1) y (μ_2, λ_2) , el homeomorfismo f corresponde a una matriz

$$A = \begin{pmatrix} -q & s \\ p & r \end{pmatrix} \text{ con } qr + ps = 1. \quad (\text{A.9})$$

El toro sólido completo puede ser representado como

$$D^2 \times S^1$$

así que para obtener M solo necesitamos adjuntar las 3-bolas a lo largo de su frontera $\partial D^3 = S^2$. La variedad M está completamente determinado por p y q . A esta variedad le llamamos **espacio de lentes** $L(p, q)$. Nótese que la condición $qr + ps = 1$ para la matriz en A.9 implica que p y q son primos relativos.

Apéndice B

Construcción de la variedad de grafo

$M(\Gamma_p)$

A continuación se muestran a detalle los cálculos necesarios para la obtención de las Bh-esferas junto con sus invariantes, que fueron utilizadas en el capítulo 3 para formar la variedad de grafo $M(\Gamma_p)$, así como los espacios de lentes $L(p, q)$ resultantes del pegado mediante “plumbing” de dichas Bh-esferas.

B.1. k -derivadas para cada Bh-esfera $S_n^{(l)}$.

Debido a que queremos que las matrices de enlace sean definidas positivas, tenemos que calcular el valor de k para las derivadas de acuerdo a la matriz K que se quiere obtener. Dicha condición se puede escribir de la siguiente forma: si tomamos el enlace $\sum(a_1, a_2, a_3) - \sum(a'_1, a'_2, a'_1 a'_2 k + 1)$, debemos tener k el menor entero tal que

$$(a'_1 a'_2 k + 1) a_3 > a_1 a_2 a'_1 a'_2. \quad (\text{B.1})$$

Tomamos como esferas homológicas iniciales las indicadas en (3.6)

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum(1, 1, 2), \\ S_1 &= \sum(2, 3, 5), \\ S_2 &= \sum(7, 11, 30), \\ S_3 &= \sum(13, 17, 2310), \\ S_4 &= \sum(19, 23, 510510). \end{aligned}$$

- Resultados para $K(0)$

Ahora procedemos a obtener las derivadas necesarias para formar el diagrama mostrado en la figura 3.1. Iniciamos con la esfera homológica S_1 ya que la esfera homológica S_0 no presenta derivada alguna en el diagrama

$$S_1^{(1)} = \sum (2, 15, 30k_1^{(1)} + 1) = \sum (2, 15, 31),$$

donde se obtuvo $k_1^{(1)} = 1$ usando (B.1), esto para garantizar que la matriz de enlace para $S_0 \text{---} S_1^{(1)}$ sea definida positiva (ver sección 3.3).

Para $S_2 = \sum (7, 11, 30)$ tenemos

$$\begin{aligned} S_2^{(1)} &= \sum (7, 330, 2310k_2^{(1)} + 1) = \sum (7, 330, 2311), \\ S_2^{(2)} &= \sum (7, 762\,630, 5338\,410k_2^{(2)} + 1) = \sum (7, 762\,630, 26\,692\,051), \end{aligned}$$

donde $k_2^{(1)} = 1, k_2^{(2)} = 5$ (ahora para definir positivamente la matriz de enlace para $S_1^{(1)} \text{---} S_2^{(2)}$).

Procedemos ahora con la esfera homológica $S_3 = \sum (13, 17, 2310)$, de donde tenemos

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum (13, 17, 2310), \\ S_3^{(1)} &= \sum (13, 39\,270, 510\,510k_3^{(1)} + 1) = \sum (13, 39\,270, 510\,511), \\ S_3^{(2)} &= \sum (13, 20\,047\,766\,970, 260\,620\,970\,610k_3^{(2)} + 1) \\ &= \sum (13, 20\,047\,766\,970, 260\,620\,970\,611), \\ S_3^{(3)} &= \sum (13, 5224\,868\,486\,304\,546\,518\,670, 67\,923\,290\,321\,959\,104\,742\,710k_3^{(3)} + 1) \\ &= \sum (13, 5224\,868\,486\,304\,546\,518\,670, 16\,709\,129\,419\,201\,939\,766\,706\,661), \end{aligned}$$

donde $k_3^{(l)} = 1$ para $l = 1, 2$ y $k_3^{(3)} = 246$ (para $S_2^{(2)} \text{---} S_3^{(3)}$).

Por último, procedemos con la esfera homológica $S_4 = \sum (19, 23, 510510)$ donde obtenemos

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum (19, 23, 510510), \\ S_4^{(1)} &= \sum (19, 11\,741\,730, 223\,092\,871), \\ S_4^{(2)} &= \sum (19, 2619\,496\,256\,206\,830, 49\,770\,428\,867\,929\,771), \\ S_4^{(3)} &= \sum \left(\begin{array}{c} 19, 130\,373\,452\,089\,350\,371\,408\,191\,290\,535\,930, \\ 2477\,095\,589\,697\,657\,056\,755\,634\,520\,182\,671 \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_4^{(4)} &= \sum \left(\begin{array}{l} 19, 322\,947\,503\,184\,188\,597\,754\,470\,274\,238\,009 \dots \\ \dots 672\,930\,371\,657\,609\,883\,719\,537\,088\,869\,030, \\ 6136\,002\,560\,499\,583\,357\,334\,935\,210\,522\,183 \dots \\ \dots 785\,677\,061\,494\,587\,790\,671\,204\,688\,511\,570k_4^{(4)} + 1 \end{array} \right) = \\
 &= \sum \left(\begin{array}{l} 19, 322\,947\,503\,184\,188\,597\,754\,470\,274\,238\,009 \dots \\ \dots 672\,930\,371\,657\,609\,883\,719\,537\,088\,869\,030, \\ 255\,104\,306\,452\,770\,178\,081\,199\,931\,377\,459\,790 \dots \\ \dots 889\,523\,831\,637\,487\,397\,155\,334\,924\,868\,522\,751 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

en donde se ha usado $k_4^{(l)} = 1$ para $l = 1, 2, 3$ y $k_4^{(4)} = 41575$ (para $S_3^{(3)} \text{---} S_4^{(4)}$).

Ahora procedemos a encontrar las esferas homológicas para los subdiagramas $\Delta_p(e)$, $e = 1, \dots, 4$. Se ilustrará el proceso de manera menos detallada.

- Resultados para $K(1)$

Para $K(1)$, formamos el esquema $S_1 \text{---} S_2^{(1)} \text{---} S_3^{(2)} \text{---} S_4^{(3)}$, donde

$$\begin{aligned}
 S_2^{(1)} &= \sum \left(7, 330, 2310k_2^{(1)} + 1 \right), \\
 S_3^{(2)} &= \sum \left(13, 20\,047\,766\,970, 260\,620\,970\,610k_3^{(2)} + 1 \right), \\
 S_4^{(3)} &= \sum \left(\begin{array}{l} 19, 130\,373\,452\,089\,350\,371\,408\,191\,290\,535\,930, \\ 2477\,095\,589\,697\,657\,056\,755\,634\,520\,182\,670k_4^{(3)} + 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Entonces, para cumplir la condición (B.1) obtenemos $k_2^{(1)} = 2$, $k_3^{(2)} = 99$ y $k_4^{(3)} = 16732$.

Así que

$$\begin{aligned}
 S_2^{(1)} &= \sum (7, 330, 4621), \\
 S_3^{(2)} &= \sum (13, 20\,047\,766\,970, 25\,801\,476\,090\,391), \\
 S_4^{(3)} &= \sum \left(\begin{array}{l} 19, 130\,373\,452\,089\,350\,371\,408\,191\,290\,535\,930, \\ 41\,446\,763\,406\,821\,197\,873\,635\,276\,791\,696\,434\,441 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

- Resultados para $K(2)$

Para $K(2)$, formamos el esquema $S_2 \text{---} S_3^{(1)} \text{---} S_4^{(2)}$, donde

$$\begin{aligned}
 S_3^{(1)} &= \sum \left(13, 39\,270, 510\,510k_3^{(1)} + 1 \right), \\
 S_4^{(2)} &= \sum \left(19, 2619\,496\,256\,206\,830, 49\,770\,428\,867\,929\,770k_4^{(2)} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

No hay que olvidar que de acuerdo a lo indicado en la sección 3.3, las derivadas previas se

toman con $k = 1$. Entonces, para cumplir la condición (B.1) obtenemos $k_3^{(1)} = 3$ y $k_4^{(2)} = 508$. Así que

$$\begin{aligned} S_3^{(1)} &= \sum (13, 39\ 270, 1531\ 531) \\ S_4^{(2)} &= \sum (19, 2619\ 496\ 256\ 206\ 830, 25\ 283\ 377\ 864\ 908\ 323\ 161). \end{aligned}$$

- Resultados para $K(3)$

Para $K(3)$, tomamos la k -derivada de S^4 , es decir,

$$S_4^{(1)} = \sum \left(19, 11\ 741\ 730, 223\ 092\ 870k_4^{(1)} + 1 \right).$$

Ahora formamos el enlace $S_3 \text{---} S_4^{(1)}$ en el que necesitamos que se cumpla la condición (B.1), así que obtenemos $k_4^{(1)} = 1$, por lo que

$$S_4^{(1)} = \sum (19, 11\ 741\ 730, 223\ 092\ 871).$$

- Resultados para $K(4)$

Para $K(4)$ sólo tomamos la esfera homológica

$$S_4 = \sum (19, 23, 510510),$$

por lo que no es necesario ninguna derivada.

B.2. Invariantes para cada Bh-esfera $S_n^{(l)}$.

Siguiendo a [48], calculamos los invariantes b_1, b_2 y b_3 para la esfera homológica $\sum (a_1, a_2, a_3)$ (con excepción de S_0), mediante

$$\begin{aligned} a_2 a_3 b_1 \bmod a_1 &= 1 \\ a_1 a_3 b_2 \bmod a_2 &= 1 \\ a_1 a_2 b_3 \bmod a_3 &= 1 \end{aligned}$$

donde se toma la regla de tomar los invariantes con el menor valor absoluto. Recordamos que para cada diagrama se toman diferentes valores de k -derivada por lo que algunas esferas homológicas podrían variar en cada uno de acuerdo al valor obtenido de k . De esta forma obtenemos para las esferas homológicas implicadas en el cálculo de $K(0)$

Esf Hom	b_1	b_2	b_3
S_0	0	0	1
$S_1^{(1)}$	-1	-7	-1
$S_2^{(2)}$	1	-108 947	-5
$S_3^{(3)}$	4	-1607 651 841 939 860 467 283	-246
$S_4^{(4)}$	-5	*	-41 575

donde * es 84986185048470683619597440588949913929045173055232557772918123429. Para $K(1)$ tenemos

Esf Hom	b_1	b_2	b_3
S_1	-1	1	1
$S_2^{(1)}$	1	-47	-2
$S_3^{(2)}$	4	-6168 543 683	-99
$S_4^{(3)}$	-5	34308803181407992475839813298929	-16 732

para $K(2)$ los invariantes son

Esf Hom	b_1	b_2	b_3
S_2	1	1	-7
$S_3^{(1)}$	4	-12083	-3
$S_4^{(2)}$	-5	689341120054429	-508

siguiendo tenemos los invariantes para $K(3)$

Esf Hom	b_1	b_2	b_3
S_3	4	-2	-439
$S_4^{(1)}$	-5	3089929	-1

y, por último, para la única esfera homológica implicada en $K(4)$ son

Esf Hom	b_1	b_2	b_3
S_4	-5	-3	200933

B.3. Invariantes para cada espacio de lentes $L(p, q)$.

Ahora ilustramos como obtener los invariantes correspondientes a cada uno de los espacios de lentes $L(p, q)$ que se generan en las pegaduras entre esferas homológicas en cada diagrama

$\Delta_p(e)$. Siguiendo la notación de la sección anterior, escribimos el enlace como $\sum(a_1, a_2, a_3) - \sum(a'_1, a'_2, a'_3)$, también escribimos como b_1, b_2 y b_3 los invariantes de $\sum(a_1, a_2, a_3)$ y como b'_1, b'_2 y b'_3 los invariantes de $\sum(a'_1, a'_2, a'_3)$. De esta forma, los invariantes se calculan [48] como

$$\begin{aligned} p &= a_1 a_2 a'_1 a'_2 - a_3 a'_3 \\ q &= -a_1 a_2 a'_1 a'_2 \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} \right) - b_3 a'_3 \\ q^* &= -a_1 a_2 a'_1 a'_2 \left(\frac{b'_1}{a'_1} + \frac{b'_2}{a'_2} \right) - b'_3 a_3 \end{aligned}$$

donde se toma como referencia que la pegadura se da entre las fibras a_3 y a'_3 (ver sección 3.4).

Presentamos los resultados de los invariantes de cada uno de los espacios de lentes correspondientes a cada diagrama $\Delta_p(e)$, recordando que el diagrama $\Delta_p(4)$ es sólo la esfera homológica S_4 por lo que no contiene espacios de lentes.

Empezamos por $\Delta_p(3)$:

Enlace	b_1	b_2	b_3
$S_3 - S_4^{(1)}$	-466041007740	88567869829	2089

Ahora escribimos los resultados para $\Delta_p(2)$:

Enlace	p	q	q^*
$S_2 - S_3^{(1)}$	-6636660	1531537	13
$S_3^{(1)} - S_4^{(2)}$	-1953837726068319020160	-610396932473078813804813	39257

Para el diagrama $\Delta_p(1)$ obtuvimos los siguientes resultados:

Enlace	p	q	q^*
$S_1 - S_2^{(1)}$	-9245	-2311	4
$S_2^{(1)} - S_3^{(2)}$	-84180573507360	11988564648107	323
$S_3^{(2)} - S_4^{(3)}$	****	*****	20047766957

donde ahora **** es $-49\,660\,235\,112\,471\,118\,762\,743\,483\,357\,286\,701\,277\,802\,160$ y ***** es $15\,280\,072\,342\,108\,259\,958\,559\,713\,567\,107\,013\,122\,386\,613$.

Por último, los valores de $\Delta_p(0)$:

Enlace	p	q	q^*
$S_0 \text{---} S_1^{(1)}$	-32	-31	1
$S_1^{(1)} \text{---} S_2^{(2)}$	-69399345	32030467	13
$S_2^{(2)} \text{---} S_3^{(3)}$	-51799863435203418336200490960	*	762623
$S_3^{(3)} \text{---} S_4^{(4)}$	**	***	5224868486304546518657

donde * es 7399970787416156625299392607, ** es -32 059 806 410 238 279 718 139 966 062 484 464 209 573 437 243 152 889 136 180 581 555 726 013 473 961 031 111 880 160 y *** es 9864 555 818 534 855 297 888 748 326 721 335 173 456 647 233 646 233 412 379 742 243 185 343 546 551 763 058 385 313.

Apéndice C

Cálculo de las fracciones continuas para $K(0)$

En este apéndice se muestran las fracciones continuas para los sumandos de los elementos diagonales de la matriz racional de enlace $K(0)$ para de esta forma obtener la matriz Q relacionada. En todos los casos se indica la forma de la fracción continua y su longitud de acuerdo a lo indicado en el capítulo 5.

C.1. Implementación del algoritmo.

Se transcribe la implementación en *Wolfram Mathematica*TM del algoritmo 5.1 propuesto en la sección 5.2. Los valores p y q representan el numerador y denominador de la fracción original $\frac{p}{q}$.

```
r = 0;
L = 0;
While[q ≠ 1 && r ≠ 1,
{c, r} = QuotientRemainder[p, q];
{k, q} = QuotientRemainder[q, r];
p = q + r;
Print[c + 1, ",", k - 1, "veces 2,"];
L = L + k;
]
If [r ≠ 1, Print[r + 1]];
If [q == 1, L = L + 1];
Print["LONGITUD=", L];
```

El programa anterior imprime el desarrollo en fracción continua (indicando el número de veces que aparece el 2 entre los demás valores) y la longitud de dicho desarrollo. Por ejemplo, para la fracción $\frac{210785}{167} = [1263, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 2, 3]$ que se mostró en la sección 5.3, el programa imprime

1263,4 veces 2,4,0 veces 2,3,1 veces 2,3
LONGITUD=9

El ejemplo ilustra la optimización del proceso al evitar calcular de manera individual cada 2 que aparece en el desarrollo.

C.2. Uso del algoritmo para el cálculo de las fracciones continuas.

Primero procedemos al cálculo de las fracciones continuas para los elementos que forman las cadenas maximales internas $\frac{p}{q}$ del grafo Γ_p . Para K^{55} tenemos cuatro cadenas internas, la primera representada por

$$\frac{32}{1} = [32],$$

de longitud 1, la segunda por

$$\frac{69\ 399\ 345}{32\ 030\ 467} = [3, 2, 2, 2, 2, 2, 5338\ 412],$$

de longitud 7, la tercera por

$$\frac{51\ 799\ 863\ 435\ 203\ 418\ 336\ 200\ 490\ 960}{7399\ 970\ 787\ 416\ 156\ 625\ 299\ 392\ 607} = [8, 2, \dots, 2, 67\ 923\ 290\ 321\ 959\ 104\ 742\ 712],$$

de longitud 108947, y la última por la representada por

$$\frac{32\ 059\ 806\ 410\ 238\ 279\ 718\ 139\ 966\ 062\ 484\ 464\ 209\ 573\ 437\ 243\ 152\ 889\ 136\ 180\ 581\ 555\ 726\ 013\ 473\ 961\ 031\ 111\ 880\ 160}{9864\ 555\ 818\ 534\ 855\ 297\ 888\ 748\ 326\ 721\ 335\ 173\ 456\ 647\ 233\ 646\ 233\ 412\ 379\ 742\ 243\ 185\ 343\ 546\ 551\ 763\ 058\ 385\ 313} = [4, 2, 2, 3, 2, \dots, 2, 6136002560499583357334935210522183785677061494587790671204 \dots \dots 688511572]$$

de longitud 401912960484965116823.

Ahora procedemos al cálculo de las fracciones continuas para los elementos que forman las cadenas maximales terminales $\frac{a}{b}$ del grafo Γ_p . Para el primer y quinto nodo, tenemos dos cadenas de este tipo. Para los otros tres nodos sólo tenemos una cadena de esta forma. En el primer nodo ambas cadenas son de longitud cero. Para el caso del quinto nodo, la primer

cadena está representada por

$$\frac{19}{5} = [4, 5],$$

de longitud 2, y la segunda cadena está representada por

$$\frac{322\ 947\ 503\ 184\ 188\ 597\ 754\ 470\ 274\ 238\ 009\ 672\ 930\ 371\ 657\ 609\ 883\ 719\ 537\ 088\ 869\ 030}{84\ 986\ 185\ 048\ 470\ 683\ 619\ 597\ 440\ 588\ 949\ 913\ 929\ 045\ 173\ 055\ 232\ 557\ 772\ 918\ 123\ 429} =$$

$$= [4, 5, 16\ 997\ 237\ 009\ 694\ 136\ 723\ 919\ 488\ 117\ 789\ 982\ 785\ 809\ 034\ 611\ 046\ 511\ 554\ 583\ 624\ 686],$$

de longitud 3. En el segundo nodo tenemos una cadena terminal representada por

$$\frac{2}{1} = [2],$$

de longitud 1. Para el tercer nodo tenemos sólo la cadena representada por

$$\frac{7}{6} = [2, 2, 2, 2, 2, 2],$$

de longitud 6. Por último, para el cuarto nodo, tenemos la cadena representada por

$$\frac{13}{9} = [2, 2, 5],$$

de longitud 3.

Bibliografía

- [1] Riess, Adams et al. “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant,” *Astronomical Journal* 116 (1998).
- [2] Perlmutter, Saul et al. “Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae,” *Astrophysics Journal* 517 (1999).
- [3] Tegmark, Max, Anthony Aguirre, Martin J. Rees y Frank Wilczek. “Dimensionless Constants, Cosmology and Other Dark Matters,” *Physics Review D* 73, 023505 (2006).
- [4] Bousso, Raphael. “TASI Lectures on the Cosmological Constant,” *arXiv* 0708.4231 [hep-th] (2007).
- [5] Aad, Georges et al. “Observation of a New Particle in the Search for the Standard Model Higgs Boson with the ATLAS Detector at the LHC,” *Physics Letter B* 716, 1 (2012).
- [6] Chatrchyan, Serguei et al. “Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC,” *Physics Letter B* 716, 1 (2012).
- [7] Yanagida, Tsutomu y Norimi Yokozaki. “Focus Point in Gaugino Mediation (Reconsideration of the Fine-tuning Problem),” *Physics Letter B* 722, 3-4 (2013).
- [8] Rubakov, Valerii. “Hierarchies of Fundamental Constants (to Items Nos 16, 17, and 27 from Ginzburg’s List),” *Physics - Uspekhi* 50 (2007).
- [9] Linde, Andrei. “Inflation, Quantum Cosmology and the Anthropic Principle” en *Science and Ultimate Reality: Quantum Theory, Cosmology, and Complexity*, editado por J D Barrow, P C W Davies, C L Harper (Jr), 426-458, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
- [10] Bousso, Raphael y Joseph Polchinski. “Quantization of Four-form Fluxes and Dynamical Neutralization of the Cosmological Constant,” *High Energy Physics JHEP* 06, 006 (2000).

-
- [11] Lavrelashvili, George, Valerii Rubakov y Peter Tinyakov. “Disruption of Quantum Coherence Upon a Change in Spatial Topology in Quantum Gravity,” *JETP Letters* 46 (1987).
- [12] Giddings, Steven y Andrew Strominger. “Axion-induced Topology Change in Quantum Gravity and String Theory,” *Nuclear Physics B* 306, 4 (1988).
- [13] Coleman, Sidney. “Black Holes as Red Herrings: Topological Fluctuations and the Loss of Quantum Coherence,” *Nuclear Physics B* 307, 4 (1988).
- [14] Wen, Xiao-Gang. “Topological Orders and Edge Excitations in Fractional Quantum Hall States,” *Advances in Physics* 44, 5 (1995).
- [15] Wen, Xiao-Gang y A. Zee. “Classification of Abelian Quantum Hall States and Matrix Formulation of Topological Fluids,” *Physical Review B* 46 (1992).
- [16] Cho, Gil Young y Joel Moore. “Topological BF field theory description of topological insulators,” *Annal Physics* 326, 6 (2011).
- [17] Diamantini, Cristina, Pasquale Sodano y Carlo Trugenberger. “From Topological Insulators to Superconductors and Confinement,” *New Journal of Physics* 14 (2012).
- [18] Maciejko, Joseph, Xiao-Liang Qi, Andreas Karch y Shou-Cheng Zhang. “Fractional Topological Insulators in Three Dimensions,” *Physical Review Letters* 105, 246809 (2010).
- [19] Diamantini, Cristina, Pasquale Sodano y Carlo Trugenberger. “Superconducting Topological Fluids in Josephson Junction Arrays,” *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39, L253 (2006).
- [20] Diamantini, Cristina y Carlo Trugenberger. “Topological Superconductivity, Topological Confinement, and the Vortex Quantum Hall Effect,” *Physical Review B* 84, 094520 (2011).
- [21] Birmingham, Danny, Matthias Blau, Mark Rakowski y George Thompson. “Topological Field Theory,” *Physics Reports* 209, 4-5 (1991).
- [22] Wen, Xiao-Gang. *Quantum Field Theory of Many-Body Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2004.
- [23] Fujita, Mitsutoshi, Wei Li, Shinsei Ryu y Tadashi Takayanagi. “Fractional Quantum Hall Effect Via Holography: Chern-Simons, Edge States and Hierarchy,” *High Energy Physics*, JHEP 2009, 6 (2009): 66.

-
- [24] Hasan, Zaid y Joel Moore. “Three-Dimensional Topological Insulators,” *Annual Review of Condensed Matter Physics* 2 (2010).
- [25] Neumann, Walter. “Commensurability and Virtual Fibration for Graph Manifolds,” *Topology* 36, 2 (1997).
- [26] Neumann, Walter. “A Calculus for Plumbing Applied to the Topology of Complex Surface Singularities and Degenerating Complex Curves,” *Transactions of the American Mathematical Society* 268, 2 (1981).
- [27] Jaco, William y Peter Shalen. “Seifert Fibered Spaces in 3-manifolds,” *Memoirs of the American Mathematical Society* 21, 220 (1979).
- [28] Johannson, Klaus. “Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries” en *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 761, Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- [29] Beasley, Chris y Edward Witten. “Non-Abelian Localization for Chern-Simons Theory,” *Journal of Differential Geometry* 70, 2 (2005).
- [30] Griguolo, Luca, Domenico Seminara, Richard J. Szabo y Alessandro Tanzini. “Black Holes, Instanton Counting on Toric Singularities and q-deformed two-dimensional Yang–Mills Theory,” *Nuclear Physics B* 772, 1 (2007).
- [31] Becerra, Fernando, Vladimir Efremov y Alfonso Hernandez. “Block Matrix Representation of a Graph Manifold Linking Matrix Using Continued Fractions,” *Applied Mathematics* 5, 13 (2014).
- [32] Efremov, Vladimir, Alfonso Hernandez y Fernando Becerra. “The Universe as a Set of Topological Fluids with Hierarchy and Fine Tuning of Coupling Constants in Terms of Graph Manifolds,” *arXiv* 1309.0690 (2013).
- [33] Eisenbud, David y Walter Neumann. *Three-dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1985.
- [34] Saveliev, Nikolai. “Fukumoto–Furuta Invariants of Plumbed Homology 3-spheres,” *Pacific Journal of Mathematics* 205, 2 (2002).
- [35] Hirzebruch, Friedrich. *Differentiable Manifolds and Quadratic Forms*. New York: Marcel Dekker, 1971.
- [36] Saveliev, Nikolai. *Invariants for Homology 3-Spheres*. Berlin: Springer, 2002.

-
- [37] Waldhausen, Friedhelm. “Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I,” *Inventiones mathematicae* 3, 4 (1967).
- [38] Popescu-Pampu, Patrick. “The Geometry of Continued Fractions and the Topology of Surface Singularities” en *Singularities in Geometry and Topology 2004*, editado por J.-P. Brasselet, T. Suwa, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 46 (2007): 119-195.
- [39] Zucchini, Roberto. “Abelian Duality and Abelian Wilson Loops,” *Communications in Mathematical Physics* 242, 3 (2003).
- [40] Zucchini, Roberto. “Four Dimensional Abelian Duality and $DL(2, \mathbb{Z})$ Action in Three Dimensional Conformal Field Theory,” *Advances in Theoretical and Mathematical Physics* 8, 5 (2004).
- [41] Bergeron, Mario, Gordon W. Semenoff, Richard J. Szabo. “Canonical BF-type Topological Field Theory and Fractional Statistics of Strings,” *Nuclear Physics B* 437, 3 (1995).
- [42] Balachandran, Aiyalam P., L. Chandar y Balachandran Sathiapalan. “Duality and the Fractional Quantum Hall Effect,” *Nuclear Physics B* 443, 3 (1995).
- [43] Allen, Theodore J., Mark J. Bowick y Amitabha Lahiri. “Topological Mass Generation In 3+1 Dimensions,” *Modern Physics Letters A* 6, 7 (1991).
- [44] Verlinde, Erik. “Global Aspects of Electric-magnetic Duality,” *Nuclear Physics B* 455, 1-2 (1995).
- [45] Dijkgraaf, Robbert, Erik Verlinde y Marcel Vonk. “On the Partition Sum of the NS Five-Brane,” *arXiv hep-th/0205281v2* (2002).
- [46] Dijkgraaf, Robbert, Lotte Hollands, Piotr Sulkowski y Cumrun Vafa. “Supersymmetric Gauge Theories, Intersecting Branes and Free Fermions,” *High Energy Physics* 02 (2008).
- [47] Efremov, Vladimir, Nikolai Mitskievich, Alfonso Hernandez y Ramona Serrano. “Topological Gravity on Plumbed V -cobordisms,” *Classical and Quantum Gravity* 22, 17 (2005).
- [48] Efremov, Vladimir, Alfonso Hernandez y Claudia Moreno. “Topological Origin Of The Coupling Constants Hierarchy In Kaluza–Klein Approach,” *International Journal of Modern Physics A* 25, 13 (2010).

-
- [49] Bousso, Raphael. “The Cosmological Constant Problem, Dark Energy, and the Landscape of String Theory,” *arXiv* 1203.0307 [astro-ph] (2012).
- [50] Polchinski, Joseph. “The Cosmological Constant and the String Landscape,” *arXiv* hep-th/0603249 (2006).
- [51] Fomenko, Anatolij T. y Sergej V. Matveev. *Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [52] Saveliev, Nikolai. *Lectures on the Topology of 3-Manifolds. An Introduction to the Casson Invariant*, Berlin: Walter de Gruyter, 1999.